MEDIA MENGAJAR

MATEMATIKA

PERSAMAAN DAN FUNGSI KUADRAT

masdayat.net / qanda.id

UNTUK SMA/MA KELAS X

masdayat.net / qanda.id

BAB 5

PERSAMAAN DAN FUNGSI KUADRAT

Sumber gambar: Shutterstock.com

5.1 Persamaan Kuadrat

Definisi Persamaan Kuadrat:
Bentuk umum persamaan kuadrat adalah $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$.

Contoh

$2x^2 + 5x - 3 = 0$, maka $a = 2, b = 5$, dan $c = -3$
$-4x^2 - 25 = 0$, maka $a = -4, b = 0$, dan $c = -25$
$3x^2 + 11x = 0$, maka $a = 3, b = 11$, dan $c = 0$

Contoh di atas menunjukkan bahwa persamaan kuadrat adalah persama yang berbentuk $ax^2 + bx + c = 0$ di mana $a, b, c \in \mathbb{R}$ dan $a \neq$ walaupun b atau c boleh nol.

Sumber: pixabay.com

Menyelesaikan Persamaan Kuadrat

Nilai-nilai x yang memenuhi persamaan kuadrat dinamakan akar-akar persamaan kuadrat atau penyelesaian persamaan kuadrat.

Cara penyelesaian persamaan kuadrat:

1. dengan pemfaktoran,
2. dengan melengkapi kuadrat sempurna,
3. dengan rumus persamaan kuadrat,
4. dengan grafik fungsi kuadrat.

Menyelesaikan persamaan kuadrat dengan pemfaktoran:

Jika suatu persamaan kuadrat dapat difaktorkan dalam bentuk $hk = 0$, maka persamaan itu dapat diselesaikan dengan pemfaktoran.

Misal:

Persamaan kuadrat $x^2 + x - 6 = 0$ difaktorkan dalam bentuk $hk = 0$.

$\Leftrightarrow (x - 2)(x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 = 0$ atau $x + 3 = 0$

$x = 2$ atau $x = -3$

Contoh

Faktorkanlah.

a) $x^2 + 10x + 21$

Jawab:

a) $x^2 + 10x + 21$

Faktor x^2 Faktor 21

$= (\ldots + \_)(\ldots + \_)$

•Faktor x^2 ialah $x \cdot x$

•Faktor 21 yang jumlahnya 10 adalah 7 dan 3

$= (x + 7)(x + 3)$

Jadi, faktor dari $x^2 + 10x + 21 = (x + 7)(x + 3)$

Contoh

1. Tentukan himpunan dari persamaan kuadrat di bawah ini dengan pemfaktoran
   a) $x^2 - 8x + 15 = 0$
   b) $4x^2 - 12x - 7$

Jawab:

a) $x^2 - 8x + 15 = 0$

$(x-3)(x-5) = 0$

$x - 3 = 0$ atau $x - 5 = 0$

$x = 3$ atau $x = 5$

Jadi, HP $= \{3, 5\}$

b) $4x^2 - 12x - 7 = 0$

$(2x+1)(2x-7) = 0$

$2x + 1 = 0$ atau $2x - 7 = 0$

$x = -\frac{1}{2}$ atau $x = \frac{7}{2}$

Jadi, HP $= \left\{-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right\}$

Catatan:
Diskriminan $(D) = b^2 - 4ac$ dari kedua persamaan kuadrat pada Contoh adalah bilangan kuadrat sempurna sehingga persamaan kuadrat dapat difaktorkan.

Menyelesaikan persamaan kuadrat dengan melengkapkan kuadrat sempurna:

- Bentuk $x^2 + 2ax + a^2$ adalah bentuk kuadrat sempurna, karena: $x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$, sedangkan bentuk $x^2 + 2ax$ bukan kuadrat sempurna, karena $x^2 + 2ax \neq (x + a)^2$.
- Suatu persamaan kuadrat yang tidak dapat diselesaikan dengan pemfaktoran dapat diselesaikan dengan melengkapkan kuadrat sempurna.

Contoh

$$x^2 + 6x + 2 = 0$$

$$x^2 + 6x = -2$$

$$x^2 + 6x + (3)^2 = (3)^2 - 2$$

$\left(\frac{1}{2} \text{ dari 6 adalah 3}\right)$

$$(x + 3)^2 = 7$$

$$(x + 3) = \pm\sqrt{7}$$

$$x + 3 = \sqrt{7} \text{ atau } x + 3 = -\sqrt{7}$$

$$x = -3 + \sqrt{7} \text{ atau } x = -3 - \sqrt{7}$$

Sumber: pixabay.com

Menyelesaikan persamaan kuadrat dengan rumus:

- Setiap persamaan kuadrat dapat dinyatakan dalam bentuk umum, $ax^2 + bx + c = 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}$, dan $a \neq 0$, akar-akar persamaan kuadratnya dapat diselesaikan dengan rumus:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Contoh

Gunakan rumus untuk menentukan akar-akar persamaan $5x^2 + 3x - 7 = 0$, sampai dengan dua angka di belakang koma.

Jawab:

$5x^2 + 3x - 7 = 0$, dengan $a = 5, b = 3$, dan $c = -7$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, substitusi nilai a, b, c ke rumus tersebut.

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4(5)(-7)}}{2(5)}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9+140}}{10} = \frac{-3 \pm \sqrt{149}}{10}$$

Jawaban Eksak:

$$x = \frac{-3+\sqrt{149}}{10} \approx \frac{-3+12{,}21}{10} \approx \frac{9{,}21}{10} \approx 0{,}92$$

atau

$$x = \frac{-3-\sqrt{149}}{10} \approx \frac{-3-12{,}21}{10} \approx \frac{-15{,}21}{10} \approx -1{,}52$$

Jumlah dan Hasil Kali Akar-Akar Persamaan Kuadrat

Akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ sangat berhubungan erat dengan koefisiennya. Misal akar-akar persamaan kuadrat tersebut adalah

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ dan } x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

sehingga diperoleh:

Jumlah akar-akar:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Hasil kali akar:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Contoh

Jika x_1 dan x_2 akar-akar persamaan kuadrat $2x^2 - 5x + 6 = 0$, tentukan nilai:

a) $x_1^2 + x_2^2$

b) $(x_1 - x_2)^2$

c) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

d) $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2$

Jawab:

$2x^2 - 5x + 6 = 0; a = 2; b = -5; c = 6.$

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{5}{2}$ dan $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{6}{2} = 3$

Jadi,

a) $$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \\ &= \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2(3) \\ &= \frac{25}{4} - 6 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

b) $(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{1}{4}\right) - 2(3) = -\frac{23}{4}$

c) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{(x_1^2 + x_2^2)}{x_1x_2} = \frac{\frac{1}{4}}{4} = \frac{1}{16}$

d) $$\begin{aligned} &(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \\ &= (x_1^2 - 2x_1 + 1) + (x_2^2 - 2x_2 + 1) \\ &= x_1^2 + x_2^2 - 2(x_1 + x_2) + 2 \\ &= \frac{1}{4} - 2\left(\frac{5}{2}\right) + 2 = \frac{1}{4} - 3 = -\frac{11}{4} \end{aligned}$$

Diskriminan dan Penggunaannya

Akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dapat dicari dengan rumus berikut:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ dan } x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Sifat dari kedua akar tersebut sangat dipengaruhi oleh nilai **Diskriminan** ($D = b^2 - 4ac$).

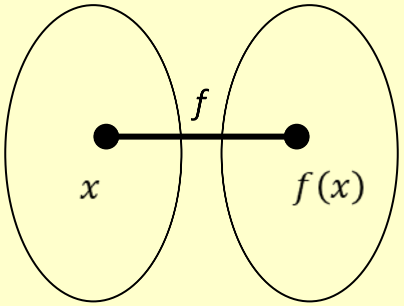
Diskriminan menunjukkan jenis akar persamaan kuadrat sebagai berikut:

1. Jika $D = 0$, kedua akarnya sama dan real,
2. Jika $D < 0$, kedua akar imajiner,
3. Jika $D > 0$, kedua akarnya real dan berbeda.

5.2 Fungsi

Definisi Fungsi:

1. Fungsi sebagai pemetaan. Fungsi dalam himpunan A (domain) ke B (range) adalah suatu aturan yang memetakan setiap anggota di A dengan tepat satu anggota dalam B.
2. Fungsi sebagai pasangan dua bilangan real x dan y adalah himpunan (x, y) di mana x paling banyak muncul satu kali dalam setiap pemetaan.



$A = D_f = D \quad B = R_f = R$

Syarat keanggotaan himpunan fungsi f biasanya ditentukan oleh pemetaan x ke y, dan pada umumnya dinyatakan suatu aturan $y - f(x)$, dimana:

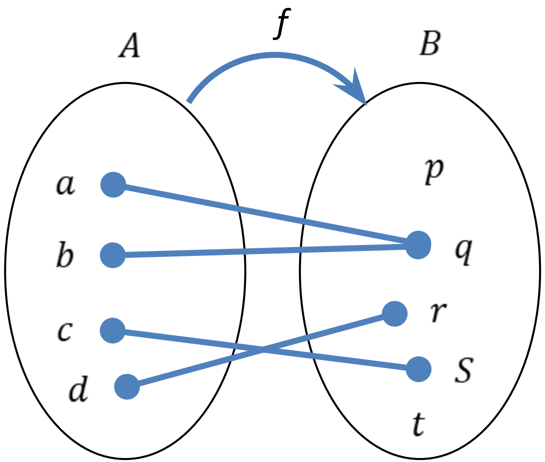
Domain : $D_f = \{x | (x, y) \in f\}$

Range : $R_f = \{y | (x, y) \in f\}$

Fungsi : $f = \{(x, y) | (x, y_1) \text{ dan } (x, y_2) \in f \rightarrow y_1 - y_2\}$

Fungsi dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi sedemikian sehingga setiap anggota himpunan A dipasangkan dengan **tepat satu** anggota himpunan B.

Domain, Range, dan Notasi suatu Fungsi



Pada suatu fungsi $f\colon A \to B$, A disebut domain D, B disebut kodomain, dan himpunan B yang mempunyai pasangan di A disebut range R (daerah hasil).

Domain D : $D_f = A = \{a, b, c, d\}$
Kodomain : $B = \{p, q, r, s, t\}$, dan
Range R : $R_f = \{q, r, s\} \subset B$


Sumber: pixabay.com

Notasi Fungsi

1. Tanda fungsi boleh dinotasikan sebagai $f\colon x$.
   Misal $f(x) = 3x + 5$ dinyatakan sebagai $f\colon x \to 3x + 5$.
2. Jika $y = 3x + 5$, maka dikatakan y adalah fungsi bagi x.

5.3 Sifat-Sifat Fungsi

1. **Fungsi Onto (Surjektif)**

   Fungsi $f: A \to B$ disebut fungsi onto apabila setiap anggota B mempunyai pasangan anggota A.

   $f: A \to B$ surjektif jika untuk setiap $b \in \mathrm{B}$ maka akan ada $a \in A$ sehingga $f(a) = b$.

2. **Fungsi Satu-satu (Injektif)**

   Fungsi $f: A \to B$ disebut fungsi satu-satu apabila setiap anggota A mempunyai pasangan tepat satu saja pada anggota B.

3. **Fungsi Korespondensi Satu (Bijektif)**

   Fungsi $f: A \to B$ disebut korespondensi satu-satu apabila fungsi tersebut merupakan fungsi surjektif dan sekaligus fungsi injektif.

5.4 Operasi Aljabar pada Fungsi

Jika f dan g adalah dua fungsi terdefinisi pada himpunan D, dimana D_f dan D_g merupakan domain dari f dan g, maka:

- Jumlah f dan g, ditulis $f + g$, didefinisikan dengan:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \text{dan } x \in D_f \cap D_g$$

- Selisih f dan g, ditulis $f - g$, didefisinikan dengan:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), \text{dan } x \in D_f \cap D_g$$

- Hasil kali f dengan scalar k, ditulis kf, didefinisikan dengan:

$$(kf)(x) = kf(x), \text{dan } x \in D_f$$

- Hasil kali f dan g, ditulis $f \cdot g$, didefinisikan dengan:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \text{dan } x \in D_f \cap D_g$$

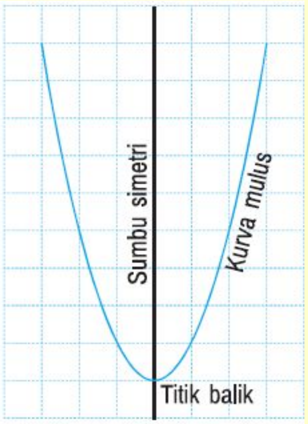
- Hasil bagi f dan g, ditulis $\frac{f}{g}$ didefinisikan dengan:

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0 \text{ dan } x \in D_f \cap \mathrm{D}_g$$

5.5 Fungsi Kuadrat

Definisi Fungsi Kuadrat

Fungsi kuadrat adalah fungsi yang berbentuk $f(x) = ax^2 + bx + c; a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$.



Melukis Grafik Fungsi Kuadrat

Grafik fungsi kuadrat berbentuk **parabola**.

Ciri khas kurva berbentuk parabola adalah:

- Kurva mulus,
- Memiliki sumbu simetri,
- Memiliki titik balik, yaitu titik balik maksimum atau minimum.

Melukis Grafik Fungsi Kuadrat $y = ax^2$ dan $y \pm k = ax^2$

Jika $y = x^2$ ditranslasikan vertikal sejauh k ke atas menjadi $y - k = x^2$, maka koordinat titik balik $(0,0)$ untuk $y = x^2$ ditranslasikan ke titik $(0, k)$, yang dinotasikan dengan

$$y = x^2 \xrightarrow{\binom{0}{k}} y - k = x^2$$

Melukis Grafik Fungsi Kuadrat $y = ax^2$ dan $y = a(x \pm h)^2$

Jika $y = x^2$ ditranslasikan horizontal sejauh h ke kanan menjadi $y = (x - h)^2$, maka koordinat titik balik $(0, 0)$ untuk $y = x^2$ ditranslasikan ke titik $(k, 0)$, yang dinotasikan dengan

$$y = x^2 \xrightarrow{\binom{h}{0}} y = (x - h)^2$$

Sketsa Grafik Fungsi Kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$

Hal-hal yang diperlukan untuk membuat sketsa grafik fungsi kuadrat adalah:

a. Titik potong parabola dengan sumbu Y diperoleh jika $x = 0$.

$$y = a(0)^2 + b(0) + c = c$$

Titik potong dengan sumbu $Y = (0, c)$.

b. Titik potong dengan sumbu X diperoleh jika $y = 0$;

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

Kemudian faktorkan persamaan kuadrat tersebut, menggunakan rumus kuadrat, melengkapkan kuadrat sempurna, atau dengan memfaktorkannya.

Diskriminan persamaan kuadrat tersebut dapat memberikan keterangan tentang titik potong sumbu X.

$D > 0 \Leftrightarrow$ dua titik potong berlainan,

$D = 0 \Leftrightarrow$ grafik menyinggung sumbu X,

$D < 0 \Leftrightarrow$ tidak ada titik potong.

Sketsa Grafik Fungsi Kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$

c. Koordinat titik balik, gunakan hubungan:

$$ax^2 + bx + c = a(x - h)^2 + k$$
$$ax^2 + bx + c = ax^2 - 2ahx + (ah^2 + k)$$

Dengan membandingkan persamaan di sebelah kiri dan kanan, diperol


Sumber: pixabay.com

$$b = -2ah \text{ atau } h = -\frac{b}{2a}$$
$$c = ah^2 + k \Leftrightarrow k = c - ah^2$$

atau

$$k = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{D}{4a}$$

Jadi, sumbu simetrinya $x = -\frac{b}{2a}$.

Titik balik $= \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$.

Sumbu simetri fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$ akan sejajar atau berimpit dengan sumbu Y.

Menyusun Fungsi Kuadrat

Suatu fungsi kuadrat dapat disusun jika diketahui hal-hal berikut:

1. Koordinat titik balik (h, k). Bentuk persamaannya $y - k = a(x - h)^2$.
2. Titik potong dengan sumbu X di titik $(p, 0)$ dan $(q, 0)$. Bentuk persamaannya $y = a(x - p)(x - q)$.
3. Kurva parabola melalui tiga titik sebarang. Bentuk persamaannya $y = ax^2 + bx + c$.

Masalah yang Melibatkan Fungsi Kuadrat

Berikut ini ada beberapa hal yang perlu diingat pada grafik fungsi:

$$y = ax^2 + bx + c;\ a, b, c \in \mathbb{R} \text{ dan } a \neq 0$$

1. Titik stasioner

$$y_{ekstrim} = -\frac{D}{4a} \rightarrow \begin{cases} y_{\text{minimum}}, \text{jika a} > 0 \\ y_{\text{maksimum}}, \text{jika a} < 0 \end{cases}$$

$y_{ekstrim}$ tercapai apabila $x = -\frac{b}{2a}$. Jadi, titik stasioner $= \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$.

2. Definit positif atau negatif

$$\text{Jika } D < 0 \text{ dan } \rightarrow \begin{cases} a > 0 \xrightarrow{\cup} x, y \text{ selalu positif untuk setiap x (definit positif)} \\ a < 0 \xrightarrow{\cap} x, y \text{ selalu negatif untuk setiap x (definit negatif)} \end{cases}$$