

ଦ୍ଵିଘାତ ଶୁଦ୍ଧିକରଣ

ବୀଜଗଣିତ

□□□□ ଚୀଞ୍ଚ ଅଧ୍ୟାୟ

□□□□ ଘାତ ସମୀକରଣ

(QUADRATIC EQUATIONS)

BY TARUNA KUMAR PAGAL (TGT PCM)

BASUDEV GOVT HIGH SCHOOL, DUMABAHAL

1. ଉପକରଣ (Introduction) :

$\Rightarrow P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) ଗୋଟିଏ
□□□□ ଘାତ ପଲିନୋମିଆଲ୍, ଯେଉଁଠାରେ a ଓ b
ଯଥାକ୍ରମେ x^2 , x ର ସହଗ ଏବଂ c ଏକ ଧ୍ରୁବ ସଂଖ୍ୟା ।

$\Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$) କୁ □□□□ ଘାତ
ସମୀକରଣ (Quadratic Equation) କୁହାଯାଏ ।

$$\text{ଉ} - 5x^2 + 7x + 9 = 0$$

=> ଯଦି $x = a$ ପାଇଁ $\square\square\square\square$ ଘାତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ $ax^2 + bx + c$ ର ମାନ ଶୂନ୍ୟ ହୁଏ, ତେବେ x କୁ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଏକ ଶୂନ୍ୟ (zero) ବା ମୂଳ (root) କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ $\square\square\square$ ରୂପ, 2, $x^2 - 5x + 6$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଏକ ଶୂନ୍ୟ । $P(2) = 0$

$$\Rightarrow 2^2 - 5 \times 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$$

2 କୁ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଏକ ଶୂନ୍ୟ ବା ମୂଳ ଅଟେ ।

2. ପୁରୁଣାବରଣରେ ପରିଣତ କରି $\square\square\square\square$ ଘାତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ (Solution by Completing the squares):

► Example - $2x^2 - 9x + 4 = 0$

$$2x^2 - 9x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 9x = -4$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{9}{2}x = -\frac{4}{2}$$

$$\Rightarrow (x)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{9}{4} = -2$$

$$\Rightarrow (x)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{9}{4} + (\frac{9}{4})^2 = (\frac{9}{4})^2 - 2$$

$$\Rightarrow (x - \frac{9}{4})^2 = \frac{81}{16} - 2 = \frac{49}{16}$$

$$\Rightarrow (x - \frac{9}{4})^2 = (\pm\frac{7}{4})^2 \Rightarrow x - \frac{9}{4} = \pm\frac{7}{4} \Rightarrow x = \frac{9}{4} \pm \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{9}{4} + \frac{7}{4} \text{ ବା } x = \frac{9}{4} - \frac{7}{4} \Rightarrow x = \frac{16}{4} = 4 \text{ \& } x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ସମୀକରଣର ବୀଜ $\square\square\square$ ହୁଏ 4 ବା $\frac{1}{2}$ ।

□□□□ ଘାତ ଦୁତର (Quadratic Formula)

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$2x^2 - 9x + 4 = 0$$

Ex-

3. ପ୍ରଭେଦକ (Discriminant) :

$b^2 - 4ac$ କୁ $\square\square\square\square$ ଘାତ ସମୀକରଣ $ax^2 + bx + c = 0$ ର ପ୍ରଭେଦକ କୁହାଯାଏ ଓ ଏହାକୁ 'D' $\square\square\square\square$ ରା ସୂଚିତକରାଯାଏ ।

ଅର୍ଥାତ୍ $D = b^2 - 4ac$ ଯଦି D ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କଲେ,

▶ $A = \frac{-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$

▶ $B = \frac{-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$

4. ମୂଳ ଚିହ୍ନର ସ୍ୱଭାବ (Nature of roots) :

ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ଧ୍ରୁତଦେଶ (D) କୁ ବିଚାରକୁ ନେଇ ସମୀକରଣଟିର ମୂଳ ଚିହ୍ନର ସ୍ୱଭାବ ନିରୂପଣ କରାଯାଏ ।

(i) $D > 0$ ହେଲେ, ମୂଳ ଚିହ୍ନ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ ପରସ୍ପରଠାରୁ ପୃଥକ ହେବେ । ଅର୍ଥାତ୍ $A \neq B$ ।

(ii) $D = 0$ ହେଲେ ମୂଳ ଚିହ୍ନ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ ହେବେ । ଅର୍ଥାତ୍ $A = B$ ।

(iii) $D < 0$ ହେଲେ ମୂଳ ଚିହ୍ନ ବାସ୍ତବ ହେବେ ନାହିଁ ।

ବି.ଦ୍ୱର. : (i) $D > 0$ ଏବଂ ପୂର୍ଣ୍ଣାଂଶବର୍ତ୍ତୀ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ,
ମୂଳ $\square\square\square$ କ୍ଷୁ ପରିମେଷୁ ଏବଂ ପୃଥକ୍ ହେବେ ।

(ii) $D > 0$ ପୂର୍ଣ୍ଣାଂଶବର୍ତ୍ତୀ ସଂଖ୍ୟା ନ ହେଲେ, ମୂଳ $\square\square\square$ କ୍ଷୁ
ଅପରିମେଷୁ ଏବଂ ପୃଥକ୍ ହେବେ ।

▶ ଉଦାହରଣ : $x^2 - 2x - 8 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳ $\square\square\square$ କ୍ଷୁର
 $\square\square\square$ ରୂପ ସ୍ଥିର କର ।

▶ ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $a = 1$, $b = -2$ ଓ $c = -8$.

ପୂର୍ଣ୍ଣାଂଶବର୍ତ୍ତୀ $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 4$
 $+ 32 = 36$ ହେତୁ $D > 0$, ମୂଳ $\square\square\square$ କ୍ଷୁ ପୂର୍ଣ୍ଣାଂଶବର୍ତ୍ତୀ ବାସ୍ତବ
ସଂଖ୍ୟା ଓ ପରସ୍ପର ପୃଥକ୍ ଅଟନ୍ତି ।

5. ମୂଳ ଓ ସହଗ ମଧ୍ୟସ୍ତରେ ସଂପର୍କ (Relation between roots and coefficients) :

ମନେକର ଘାତ ଦ୍ୱିତୀୟର ସମୀକରଣଟି $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$) ଓ ଏହାର ମୂଳ α ଓ β ।

(a ଓ b ଯଥାକ୍ରମେ x^2 ଓ x ର ସହଗ ଏବଂ c ଏକ ଧ୍ରୁବକ)

(i) ମୂଳ ଯୁଗ୍ମର ସମଷ୍ଟି :

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} \text{ ଅର୍ଥାତ୍, ମୂଳଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି} = \frac{-b}{a}$$

(ii) ମୂଳ ଯୁଗ୍ମର ଗୁଣଫଳ :

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} \text{ ଅର୍ଥାତ୍, ମୂଳଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ} = \frac{c}{a}$$

6. କେତେଗୁଡ଼ିଏ ଜଣାଶୁଣା ଫଳାଫଳ (Some known result)

$$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \text{ ଏବଂ } \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$(I) \alpha - \beta = \pm \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \pm \sqrt{\left\{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a}\right\}} = \pm \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{a}$$

$$(II) \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

$$(III) \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) \\ = \left(-\frac{b}{a}\right) \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{a} = \frac{-b\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{a^2}$$

$$(IV) \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ = \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right) = \frac{-b^3 + 3abc}{a^3} = \frac{-b(b^2 - 3ac)}{a^3}$$

$$(V) \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b^2 - 2ac}{ca}$$

7. ଚାହାଣ କରନ୍ତୁ ଯେଉଁ ସମୀକରଣର ଗଠନ (Formation of a quadratic equation) :

ଚାହାଣ କରନ୍ତୁ ଯେଉଁ ସମୀକରଣ $:x^2 - (\text{ମୂଳ ଚାହାଣ କରନ୍ତୁ ସମଷ୍ଟି})x + \text{ମୂଳଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ} = 0$
ଉ: ଯଦି α ଓ β ଚାହାଣ କରନ୍ତୁ ସମୀକରଣର ମୂଳ ଚାହାଣ କରନ୍ତୁ ସମଷ୍ଟି -5 ଓ ଗୁଣଫଳ 3 ହେଲେ, ସମୀକରଣଗଠନ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର α ଓ β ଆବଶ୍ୟକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ ।

ଏଠାରେ $\alpha + \beta = -5$ ଓ $\alpha\beta = 3$ (ଦିଆ)

ଆବଶ୍ୟକ ସମୀକରଣ : $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow x^2 - (-5)x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 3 = 0$

8. □□□□ ଘାତ ସମୀକରଣ ରୂପରେ ରୂପାନ୍ତରଣ :

▶ Q: $4x^4 - 21x^2 + 20 = 0$ ସମୀକରଣଟିର ମୂଳ ନିରୂପଣ କର ।

▶ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଟିର ଘାତ 4 ଓ ଏହା □□□□ ଘାତ ନୁହେଁ । ମାତ୍ର $x^2 = y$ ଲେଖିଲେ $4y^2 - 21y + 20 = 0$ (i)

$a = 4, b = -21$ ଓ $c = 20$ | ପୁରସ୍କେପକ (D) = $b^2 - 4ac = (-21)^2 - 4 \times 4 \times 20 = 441 - 320 = 121$

⇒ $y = -b \pm \sqrt{D}/2a = -(-21) \pm \sqrt{121}/8 = 21 \pm 11/8 = 21 + 11/8$ କିମ୍ବା $21 - 11/8 = 4$ କିମ୍ବା $5/4$.

⇒ $y = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ ପୁନଶ୍ଚ $y = 5/4 \Rightarrow x^2 = 5/4 \Rightarrow \pm \sqrt{5/2}$ ଆବଶ୍ୟକୀୟ ମୂଳଗୁଡ଼ିକ ହେଲା $(\pm 2, \pm \sqrt{5/2})$ । (ଉତ୍ତର)

9. □□□□ ଘାତ ସମୀକରଣର ପରଯୋଗ

Ex -ଗୋଟିଏ ପରିବାରରେ ଆଳୁଦାର ବୟସ, ବିଟା ଓ ଗାମାର ବୟସର ଗୁଣଫଳ ସହ ସମାନ । ଯଦି ବିଟା, ଗାମାରୁ 1 ବର୍ଷ ବଡ଼ ହୁଏ ଏବଂ ଆଳୁଦାର ବୟସ 42 ହୁଏ, ତେବେ 5 ବର୍ଷ ପରେ ବିଟାର ବୟସ କେତେ ହେବ ?

A- ମନେକର ପରିବାରରେ ଗାମାର ବୟସ = x ବର୍ଷ .. ବିଟାର ବୟସ = $(x + 1)$ ବର୍ଷ ।

ଆଳୁଦାର ବୟସ = 42 ବର୍ଷ ।

ପରମ୍ପରାରେ $x(x + 1) = 42 \Rightarrow x^2 + x = 42. \Rightarrow x^2 + x - 42 = 0$

$\Rightarrow x + 7x - 6x - 42 = 0$

$\Rightarrow x(x + 7) - 6(x + 7) = 0 = (x + 7)(x - 6) = 0$

$\Rightarrow x + 7 = 0$ ବା $x - 6 = 0 \Rightarrow x = -7$ ବା $x = 6$

$x = -7$ ବୟସ ରଣାତ୍ମକ ହେବନାହିଁ ତେଣୁ ଏହା ଅସମ୍ଭବ । ତେବେ $x = 6$ ଗ୍ରହଣୀୟ ।

ଗାମାର ବୟସ = x ବର୍ଷ = 6 ବର୍ଷ ଏବଂ ବିଟାର ବୟସ = $6 + 1 = 7$ ବର୍ଷ ।

5 ବର୍ଷ ପରେ ବିଟାର ବୟସ ହେବ = $7 + 5 = 12$ ବର୍ଷ ।



THANK YOU....

THE END....