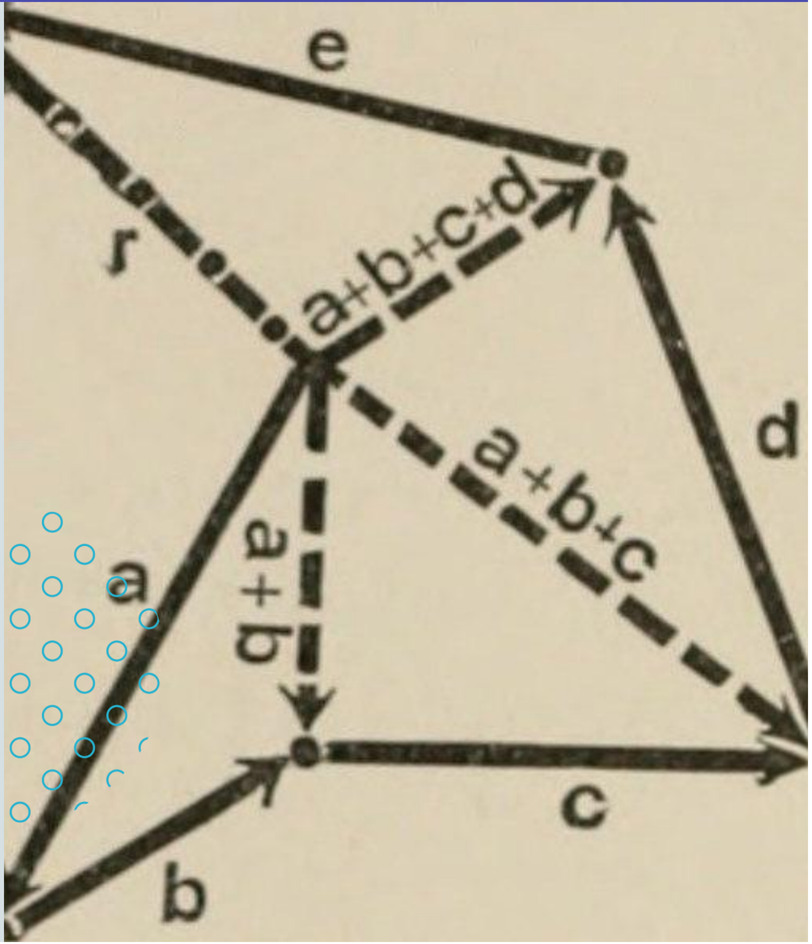
Universitetet
i Sørøst-Norge



Trigonometri og vektorregning

Kjetil Liestøl Nielsen
Førsteamanuensis
Institutt for matematikk og naturfag

Dagens tema

- Trigonometri på vilkårlige trekanter
- Vektorer i planet

Vi skal bruke Socrative i dag. Gå til
https://b.socrative.com/login/student/
og skriv inn koden "19ogekso"

Læringsutbytter:

- Kunne bruke definisjonen på trigonometriske funksjoner i trekantregning.
- Kan utlede og bruke cosinussetningen, sinussetningen og arealsetningen, og tilsvarende setninger ved å bruke liknende metoder.
- Forstå forskjellen på en scalar og en vektor
- Forstår hvordan en vektor kan fremstilles
- Kan multiplisere en skalar til en vektor
- Kan legge sammen vektorer og trekke fra en vektor fra en annen
- Kan forklare den grafiske fremstillingen av vektoraddisjon og subtraksjon.
- Kan bruke regneregler for vektorer

Trigonometriske funksjoner

Trigonometriske funksjoner - oppfriskning

Siden forholdene mellom sidene i en rettvinklet trekant kun avhenger av vinkelen, kan vi definere forholdene som funksjoner av vinkel. Vi kaller disse for sinus, cosinus og tangens.

$$\sin(\theta) = \frac{b}{c}$$

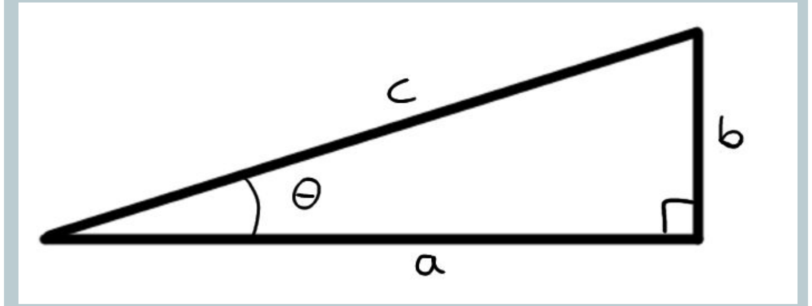
$$\cos(\theta) = \frac{a}{c}$$

$$\tan(\theta) = \frac{b}{a}$$

a: hosliggende katet

b: motstående katet

c: hypotenus



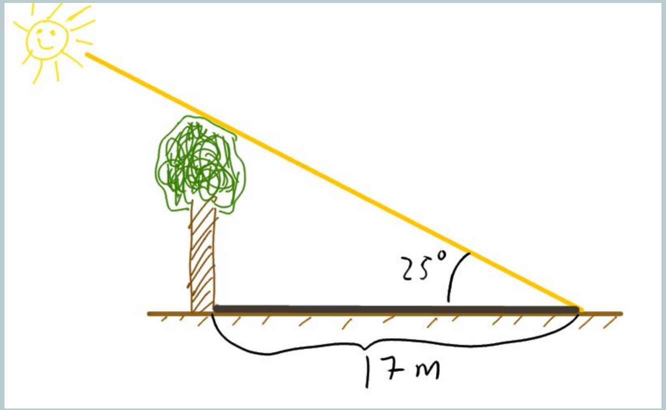
Merk: For å forkorte notasjonen, dropper man ofte paranteser rundt argumentet, dvs.

$$\sin(x) = \sin x$$

Merk: sin, cos og tan gjelder kun for rettvinkla trekanter.

Eksempel

Et tre har en skygge på 17 m når solstrålene danner en vinkel på 25 grader med bakken. Hvor høyt er treet?



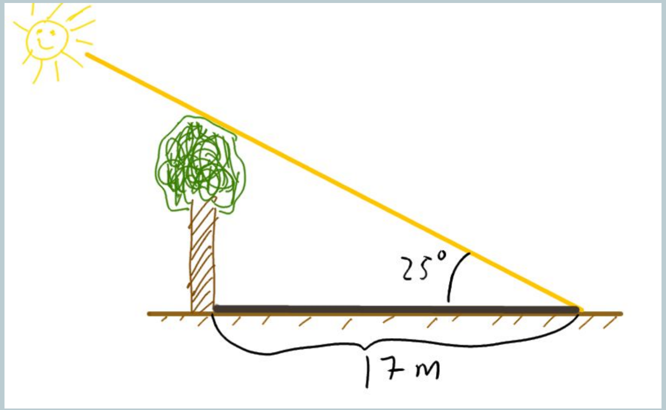
Eksempel - Løsning

Treet, skyggen og solstrålene danner en rettvinkla trekant. Dersom vi kaller høyden av treet for h, får vi:

$$\tan(25^\circ) = \frac{h}{17}$$

$$h = 17\tan(25^\circ)$$

Høyden er ca. 7.9 m.



NB: Husk å stille kalkulatoren på grader!

Vilkårlige trekanter

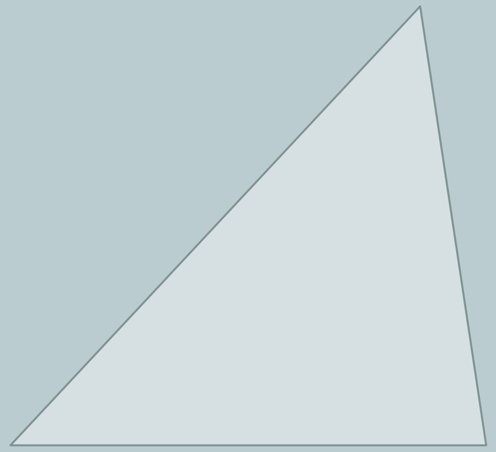
Hva gjør vi dersom trekanten ikke er rettvinklet?
Kan vi da bruke sin, cos og tan?

Svar: Ja, men vi kan ikke bruke dem “direkte”.

Tre setninger som fungerer på alle trekanter:

1. Cosinussetningen
2. Sinussetningen
3. Arealsetningen

En vilkårlig trekant



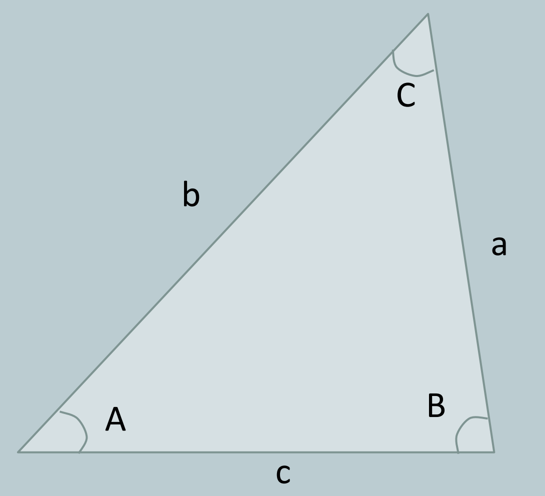
Setninger om trekanter

For en vilkårlig trekant med sider og vinkler slik som figuren i margen, gjelder følgende setninger:

1. Cosinussetningen: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$

2. Sinussetningen: $\dfrac{\sin(A)}{a} = \dfrac{\sin(B)}{b} = \dfrac{\sin(C)}{c}$

3. Arealsetningen: Areal trekant $= \frac{1}{2}bc\sin(A)$



Universitetet i Sørøst-Norge

Eksempel 1

En trekant har sider med lengder 2, 5 og 6. Finn vinklene i trekanten.

Eksempel 1 - løsning

Cosinussetningen gir

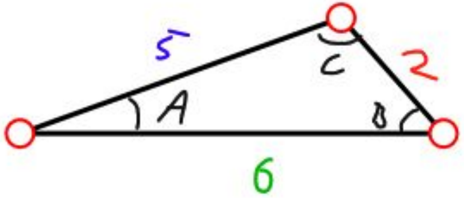
1) $2^2 = 5^2 + 6^2 - 2\cdot 5\cdot 6\cdot\cos(A)$

$4 = 25 + 36 - 60\cos(A)$

$60\cos(A) = 57$

$A = \arccos\left(\frac{57}{60}\right)$

$\approx \underline{18^\circ}$



2) $5^2 = 6^2 + 2^2 - 2\cdot 2\cdot 6\cdot\cos(B)$

$25 = 36 + 4 - 24\cdot\cos(B)$

$24\cos(B) = 15$

$B = \arccos\left(\frac{15}{24}\right) \approx \underline{\underline{51^\circ}}$

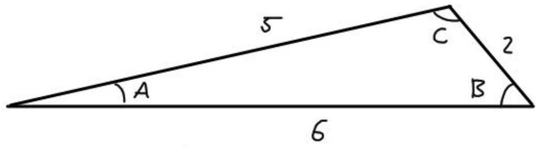
3) $A + B + C = 180^\circ$

$C = 180^\circ - A - B = 180^\circ - 18^\circ - 51^\circ = \underline{111^\circ}$

Oppgave 1

Anta at vi har en likesidet trekant hvor sidene har en lengde gitt ved x. Bruk cosinussetningen til å vise at vinklene i trekanten faktisk er 60 grader (det holder å vise for én vinkel).

Oppgave 1 - løsning



1)

$$2^2 = 5^2 + 6^2 - 2\cdot 5\cdot 6\cdot \cos(A)$$
$$4 = 25 + 36 - 60\cdot\cos(A)$$

$$60\cos(A) = 57$$
$$\cos(A) = \frac{57}{60}$$
$$A = \arccos\left(\frac{57}{60}\right) = \underline{18^\circ}$$

2)

$$5^2 = 6^2 + 2^2 - 2\cdot 2\cdot 6\cdot\cos(B)$$
$$25 = 36 + 4 - 24\cos(B)$$
$$24\cos(B) = 15$$
$$B = \arccos\left(\frac{15}{24}\right) = \underline{51^\circ}$$

3)

$$A + B + C = 180^\circ$$
$$C = 180^\circ - A - B = 180^\circ - 18^\circ - 51^\circ$$
$$= \underline{\underline{111^\circ}}$$

Bevis for sinussetningen

Vi har:

1) $\sin(A) = \frac{h}{b}$

$\Rightarrow h = b \cdot \sin(A)$

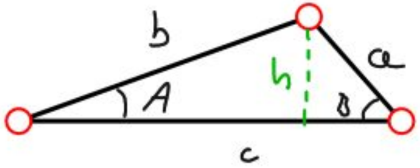
2) $\sin(B) = \frac{h}{a}$

$\Rightarrow h = a \cdot \sin(B)$

$h = h$

$b \sin(A) = a \sin(b) \quad \Big| \cdot \frac{1}{ab}$

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b}$$



Beviset for $\frac{\sin(C)}{c}$ blir tilsvarende

Bevis for cosinussetningen

Vi har

1) $\cos(A) = \frac{s}{b}$

$\Rightarrow s = b\cos(A)$

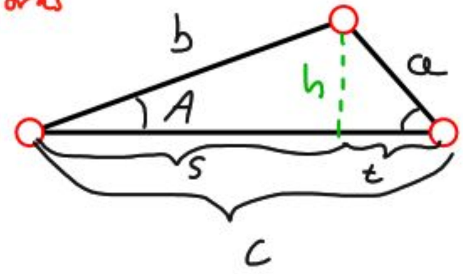
2) $b^2 = h^2 + s^2$ ← Pythagoras

$\Rightarrow h^2 = b^2 - s^2$

3) $a^2 = h^2 + t^2$

4) $c = s + t$

$\Rightarrow t = c - s$



Dette gir oss:

$$a^2 = \underbrace{(b^2 - s^2)}_{h^2} + (\underbrace{c - s}_{t})^2$$

$$= b^2 - s^2 + c^2 - 2sc + s^2$$

$$= b^2 + c^2 - 2sc = b^2 + c^2 - 2(b\cos(A)\cdot c)$$

$$\rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos(A)$$

Oppgave 2

Bevis arealsetningen

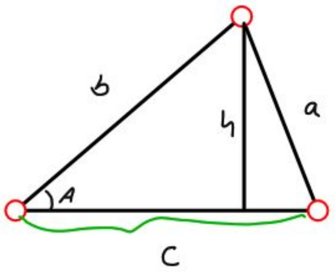
Oppgave 2 - løsning

$$\text{Areal} = \tfrac{1}{2} bc \cdot \sin(A)$$

1) $\boxed{\sin(A) = \frac{h}{b}}$ → $h = b \cdot \sin(A)$

2) $\boxed{\text{Areal} = \frac{g \cdot h}{2}}$

3) $g = c$



$$= \tfrac{1}{2} g \cdot h = \tfrac{1}{2} ch = \underline{\tfrac{1}{2} bc \cdot \sin(A)}$$

Introduksjon til vektorer

Vektorer og skalarer

Fysiske størrelser forekommer i to varianter: skalarer og vektorer.

Skalar: En fysisk størrelse som har en verdi, slik som “masse”, “volum” og “energi”.

Vektor: En fysisk størrelse som har både en verdi og retning, slik som “hastighet”, “forflytning” og “kraft”.

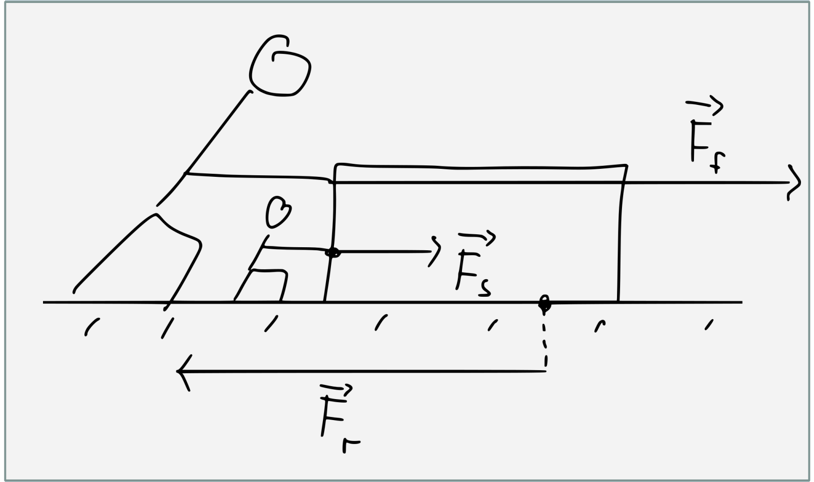
Eksempel på vektorer

En vektor representeres som regel ved en pil, hvor lengden av pilen sier noe om størrelsen på vektoren.

Figuren til høyre viser tre krefter:

- Mannen dytter med større kraft enn gutten og har dermed lengre vektorpil.
- Friksjonskraften (nederst) virker i motsatt retnings om dyttebevegelsen, og vektorpilen peker dermed i motsatt retning.

Krefter er et eksempel på fysiske størrelser som representeres ved vektorer.



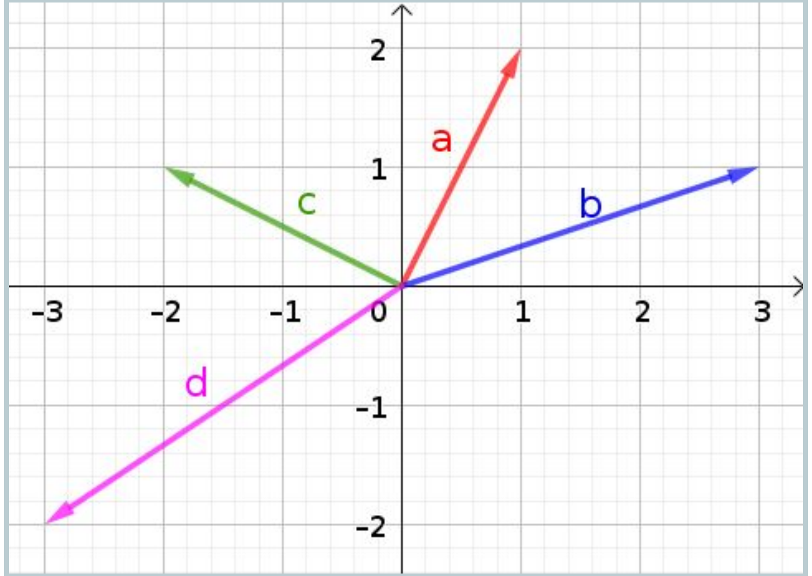
Matematisk notasjon

Hvis vi plasserer starten av vektorpilen i origo i et koordinatsystem, kan vi skrive vektoren ved å angi koordinatene hvor pilen slutter.

- $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Tallene som står for x og y-koordinaten til punktet hvor vektorpilen slutter, kalles for vektorens **komponenter**.

Vektorer representeres ved piler.



Merk: I QED skrives vektorer med klammeparenteser, f.eks. [1,2]. Dette er for å skille mellom punktet gitt ved (1,2) og vektoren gitt ved [1,2]. Legg også merke til at Geogebra skriver dem vertikalt. Dette blir mer viktig når vi kommer til Matriser i masterfaget i matematikk.

Merk

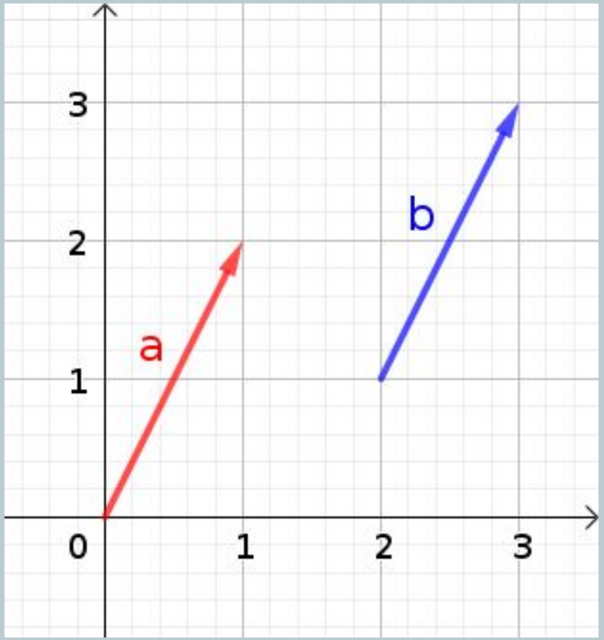
En vektor har en retning, men ikke en **posisjon**, dvs. at vektor **a** og **b** i figuren til høyre er identiske.

$$\bullet\ \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bullet\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

I fysikken pleier vi derimot likevel å "plassere" en vektor i en figur der hvor den er relevant, f.eks. angrepspunktet til en kraftvektor.

En vektor har ikke en posisjon.



Vektorer i høyere dimensjoner

Vi kan også ha vektorer i høyere dimensjoner, f.eks.

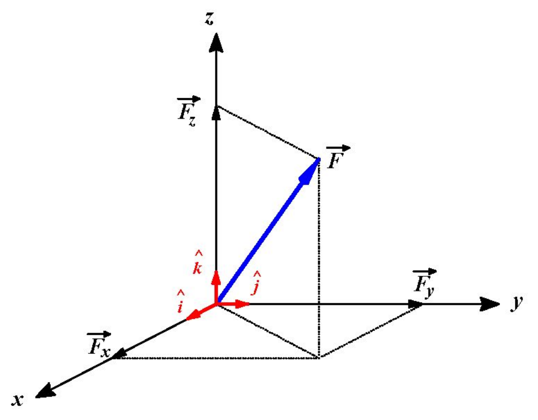
3D-vektor: **a** = [1, 4, 6]

4D-vektor: **a** = [2, 4, 3, 7]

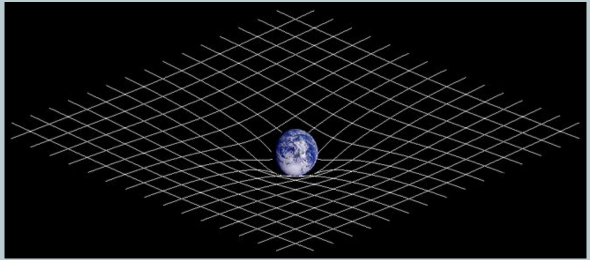
Generelt sett kan vi skrive en n-dimensjonal vektor som $\boldsymbol{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$

Merk: Vi kunne kalt den første komponenten til **u** for x-komponenten, den andre for y-komponenten osv., men siden vi har n dimensjoner, er det enklere å bare kalle komponentene for 1,2,3 osv.

Grafisk fremstilling av en vektor i tre dimensjoner.



4D-vektorer er viktig innenfor relativitetsteorien siden man der jobber med tre romlige dimensjoner og tid som en fjerde dimensjon.



Matematisk notasjon - del 2

Når vi skriver vektorer i utregning, bruker vi enten

- Fet skrift: $\boldsymbol{a}$
- Liten pil over symbolet: $\vec{a}$

Det er smak og behag hva man vil bruke. Fet skrift ser ofte ryddigere ut når det blir mange vektorer i en utregning, mens pil-notasjonen er lettere å bruke når man skriver for hånd.

Merk: Pilen over symbolet er ikke selve vektorpilen, det er bare en del av notasjonen for å vise at det er snakk om en vektor.

Regning med vektorer

Regning med vektorer

For å kunne bruke vektorer til noe nyttig, må vi først kunne regne med vektorer.

I de neste sidene skal vi se på en innføring i regning med vektorer.

Mer avanserte regler (f.eks. multiplikasjon mellom to vektorer) og eksempler fra fysikk kommer på neste forelesning.

Multiplikasjon med skalar

Anta at $\boldsymbol{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$ er en n-dimensjonal vektor og *k* er en skalar. Vi har da:

$$k\boldsymbol{u} = [ku_1, ku_2, \ldots, ku_n]$$

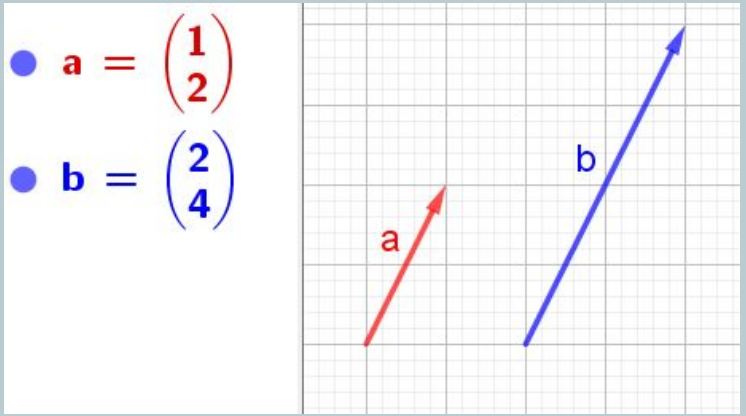
Dvs. vi multipliserer skalaren med hver komponent i vektoren.

Eksempel:

a) $2 \cdot [2, 4] = [2 \cdot 2, 2 \cdot 4] = [4, 8]$

b) $3 \cdot [3, 5, 4] = [9, 15, 12]$

c) $4 \cdot [1, 3, 2, 4] = [4, 12, 8, 16]$



Merk: b = 2**a** betyr at **b** peker i samme retning som **a**, men er dobbelt så lang.

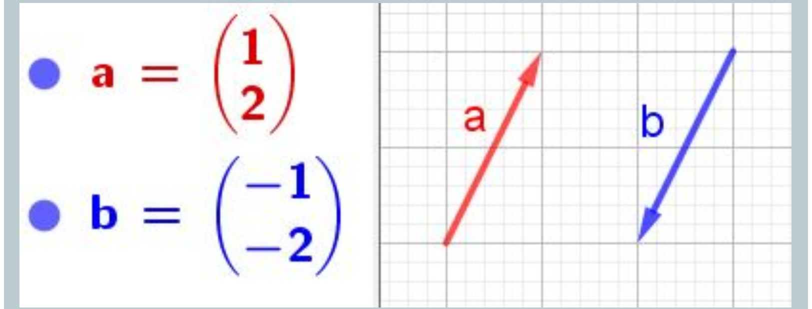
Positive og negative vektorer

Dette kan vi bruke til å definere negative vektorer. Dersom **u** = [2,3], vil -**u** være gitt ved:

$$-\boldsymbol{u} = -1 \cdot \boldsymbol{u} = -1 \cdot [2,3] = [-2,-3]$$

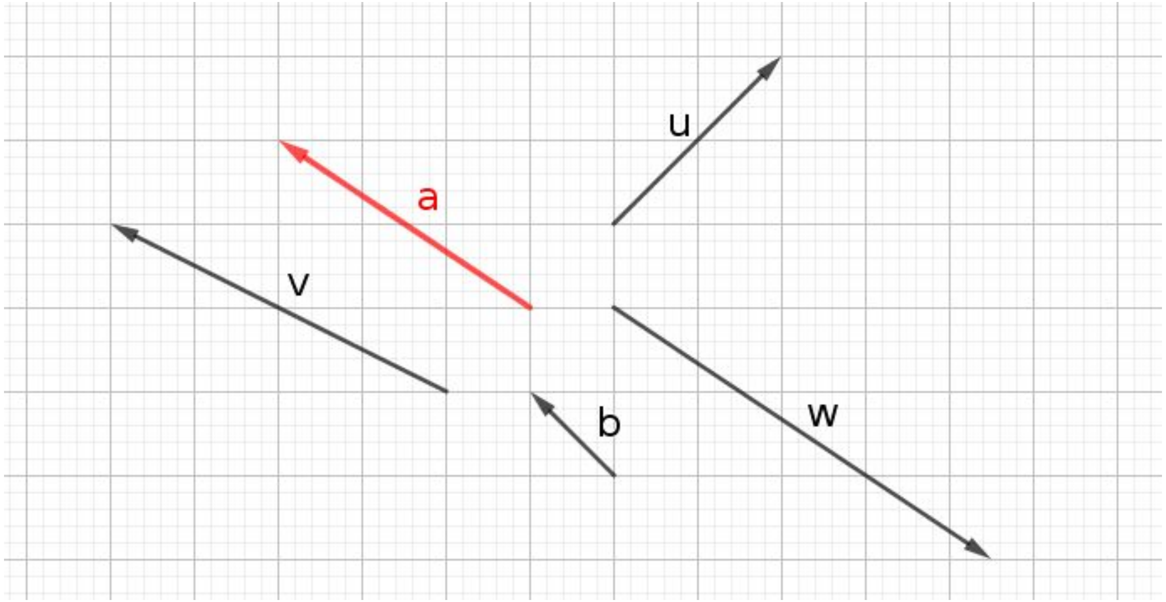
En vektor som er en negativ av en annen, har en pil som er like lang, men som peker i motsatt retning.

I bildet under er **a** = -**b**.



Oppgave 3

Hvor mange av vektorene i figuren er på formen *k***a**, hvor *k* er en konstant?



Addisjon

Anta at $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ og

$\boldsymbol{b} = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$

er to n-dimensjonale vektorer. Vi har da:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = [a_1, a_2, \ldots, a_n] + [b_1, b_2, \ldots, b_n]$$
$$= [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n]$$

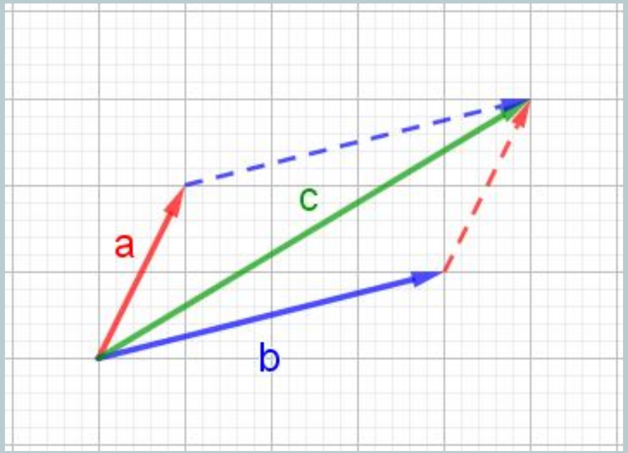
Dvs. vi legger sammen tilhørende komponenter til hver vektor.

Eksempler:

a) [1, 2] + [3, 4] = [1+3, 2+4] = [4, 6]

b) [-3, 5, 4] + [7, 8, 2] = [4, 13, 6]

Grafisk fremstilling: I figuren er **c** = **a**+**b**. Dersom vi plasserer den ene pilen der hvor den andre slutter, vil **c** bli en pil fra starten av den første til slutten av den siste.



Merk: Fra figuren ser vi at **a** + **b** = **b** + **a**

Subtraksjon

Anta at $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ og

$$\boldsymbol{b} = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$$

er to n-dimensjonale vektorer. Vi har da:

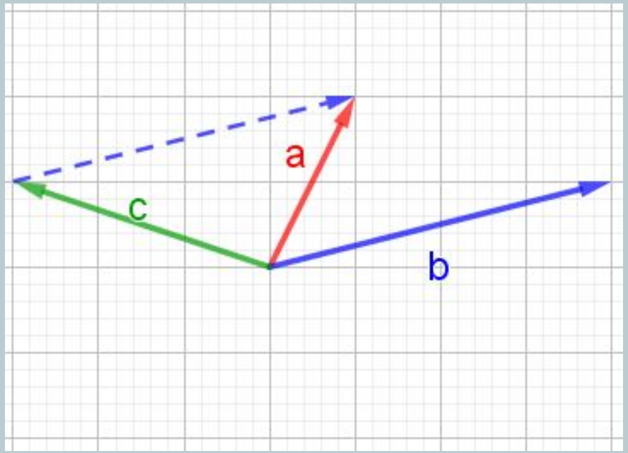
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} &= [a_1, a_2, \ldots, a_n] - [b_1, b_2, \ldots, b_n] \\ &= [a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n]\end{aligned}$$

Dvs. vi trekker hver komponent i **b** fra tilhørende komponenter i **a** i den resulterende vektoren.

Eksempler:

a) [1, 2] - [3, 4] = [1-3, 2-4] = [-2, -2]
b) [-3, 5, 4] + [7, 8, 2] = [-10, -3, 2]

Grafisk fremstilling: I figuren er **c** = **a**-**b**. Dersom vi plasserer **b** med pilhodet hvor **a** slutter, vil **c** bli en pil fra **a** til hvor **b**-pilen starter.



Merk: Ser du fra figuren at **a** - **b** = -(**b** - **a**)?

Regneregler

Fra disse definisjonene, kan vi lage et sett med regneregler. Anta **a**, **b** og **c** er n-dimensjonale vektorer og *k* og *s* er skalarer. Da gjelder:

1. **a** + **b** = **b** + **a**
2. **a** + (**b** + **c**) = (**a** + **b**) + **c**
3. k(**a** + **b**) = k**a** + k**b**
4. k(**a**-**b**) = k**a** - k**b**
5. k(s**a**) = (ks)**a**

Prøv å bevise noen av disse selv ved å bruke definisjonene for addisjon, subtraksjon og multiplikasjon med skalar.

NB: Man kan ikke addere/subtrahere vektorer med forskjellig dimensjon! F.eks. en todimensjonal vektor kan ikke legges til en tredimensjonal vektor.

Oppgave 4

Anta vi har vektorene **a** = [3, 4], **b** = [-1, 5] og **c** = [2, -6].

a) 2(**a** + **b**) - **c**
b) **c** - 2(**a**+3**b**)

Oppgave 4 - løsning

$$\vec{a} = [3, 4] \qquad \vec{b} = [-1, 5] \qquad \vec{c} = [2, -6]$$

a) $2(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{c} = 2\big([3,4] + [-1,5]\big) - [2,-6]$

$$[\underset{x}{6}, 8] + [\underset{x}{-2}, 10] + [\underset{x}{-2}, 6] = \underline{[2, 24]}$$

b) $\vec{c} - 2(\vec{a} + 3\vec{b}) = [2, -6] - 2\big([3,4] + 3[-1,5]\big)$

$$[\underset{x}{2}, \overset{y}{-6}] + [\underset{x}{-6}, \overset{y}{-8}] + [\underset{x}{6}, \overset{y}{-30}] = \underline{[2, -44]}$$

Lengden av en vektor

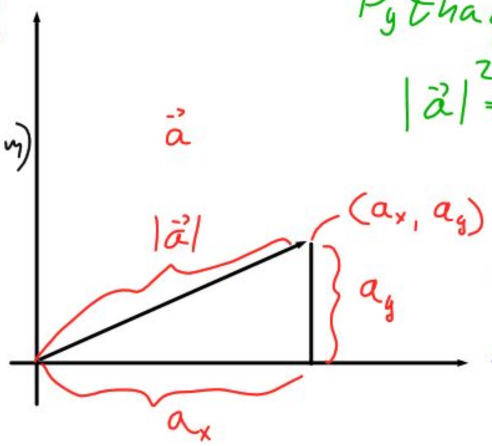
$\vec{a} = [a_x, a_y]$

Lengden til Vektoren (norm) skrives som

$|\vec{a}|$

el.

$\|\vec{a}\|$



Pythagoras

$$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

n-dim: $\vec{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

Enhetsvektorer

$\vec{a} = [1, 2]$

$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \underline{\sqrt{5}} \approx \underline{2{,}23}$

Enhetsvektor

↳ vektor med lengde 1.

$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

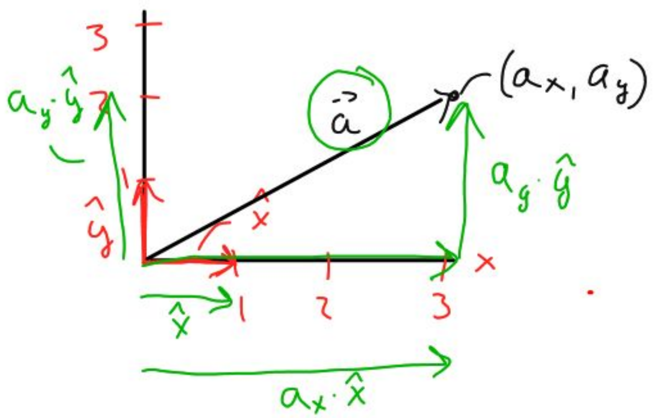
$[1, 1] = \vec{a}$

$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2}$
$= \sqrt{2}$

$\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \underline{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]}$

$|\hat{a}| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = \underline{1}$

$$\vec{a} = [a_x, a_y] = a_x \cdot \hat{x} + a_y \cdot \hat{y}$$



$a_x = 3$

$a_y = 2$