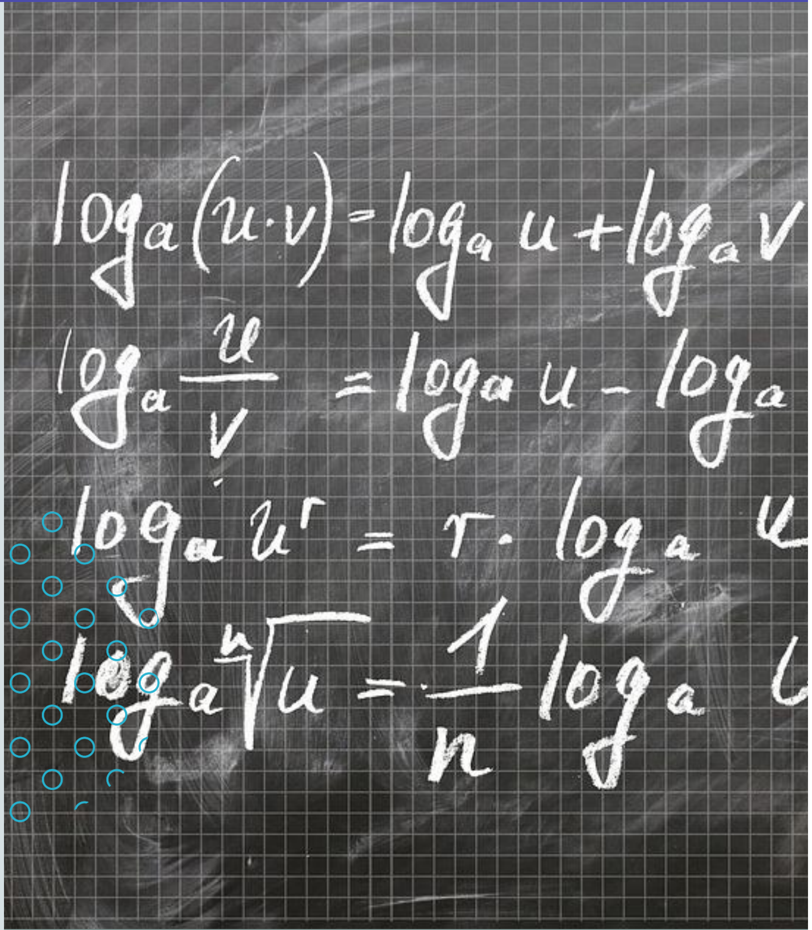
Trigonometriske og logaritmiske og inverse funksjoner

Kjetil Liestøl Nielsen
Førsteamanuensis
Institutt for matematikk og naturfag



Dagens tema

- Trigonometriske funksjoner
- Logaritmiske og eksponentialfunksjoner
- Inverse funksjoner

Socrative:

https://b.socrative.com/login/student/

Kode: 19ogekso

Påminnelse: øving 2 har frist på søndag

Husk å lufte hodet i pausene i dag. Blir en lang dag.

Læringsutbytter:

- Kunne bruke definisjonen på trigonometriske funksjoner i enkel trekantregning.
- Kunne bruke radianer og regne om fra og til grader.
- Kunne bruke den utvidede definisjonen på trigonometriske funksjoner.
- Kunne identifisere/regne ut amplitude, likevektslinje, periode og fasen til en harmonisk svingning.
- Kunne bruke inverse trigonometriske funksjoner til å løse likninger med trigonometriske funksjoner.
- Forstå relasjonen mellom en eksponential og en logaritmisk funksjon.
- Kunne bruke regnereglene til logaritmer.
- Kunne løse likninger med logaritmer og eksponentialfunksjoner.

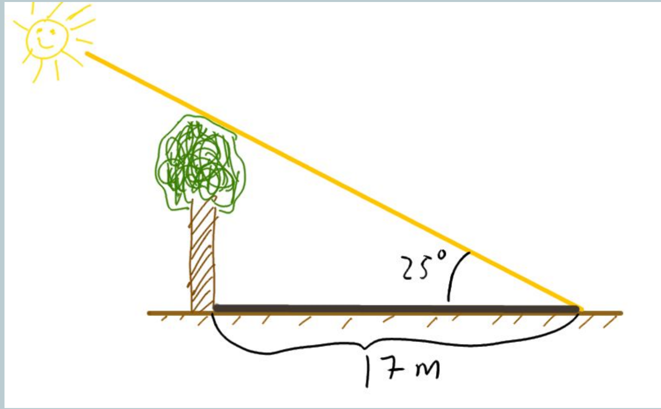
Trigonometriske funksjoner

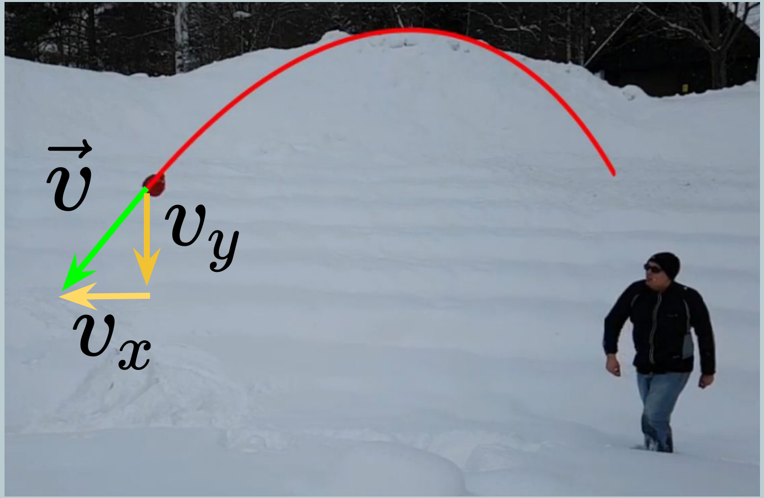
Trekanter

Trekanter er en svært viktig geometrisk form som ofte dukker opp.

Eksempler:

- Finner ofte trekanter i naturen.
- Dekomponering av vektorer som krefter, hastighet og akselerasjon.
- Så godt som all 3D-grafikk består av et stort antall trekanter.





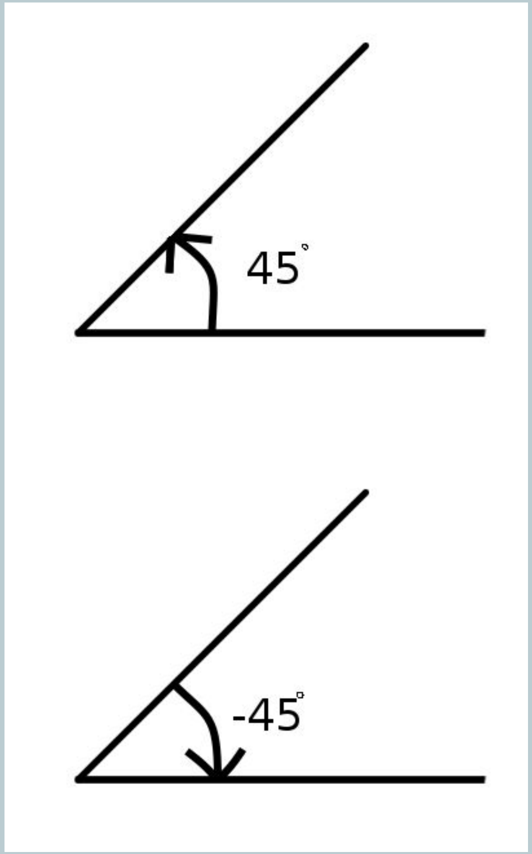
Vinkler

Vi kan definere en vinkel som en “dreining” eller rotasjon.

Positiv vinkel tilsvarer en rotasjon mot klokka.

Negativ vinkel tilsvarer en rotasjon med klokka.

En hel omdreining tilsvarer 360 grader.



Radianer

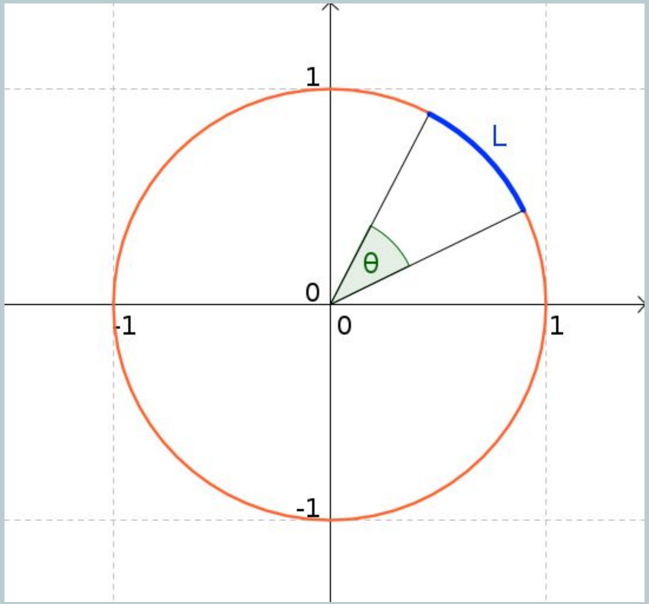
Alternativt mål for vinkler som ofte brukes i funksjonsanalyse (bruker grader i geometri).

Radianer er definert ut fra enhetssirkelen.

Vinkelen θ er definert som lengden av buelengden L i enhetssirkelen.

En hel omdreining blir da 2π (omkretsen til sirkelen).

Enhetssirkelen (sirkel med radius 1)



Merk: Radianer kalles også for absolutte vinkelmål.

NB: Husk å stille inn kalkulatoren til grader eller radianer.

Konvertere vinkler

1) 90 grader tilsvarer ¼ sirkel. Dette tilsvarer derfor 2π*¼ = π/2 radianer.
2) 180 grader tilsvarer ½ sirkel. Dette tilsvarer derfor 2π*½ = π radianer.
3) Generell regel. Anta x er målt i radainer og θ er målt i grader. Vi har da:

$$\frac{\theta}{360^\circ} = \frac{x}{2\pi}$$

eller

$$\frac{\theta}{180^\circ} = \frac{x}{\pi}$$

Oppgave 1

a) Gjør om 75 grader til radianer.
b) Gjør om π/6 til grader.

Hint: Bruk uttrykket som viser den generelle sammenhengen mellom grader og radianer på forrige side og løs likningen for det du ønsker å finne (x for radianer og θ for grader).

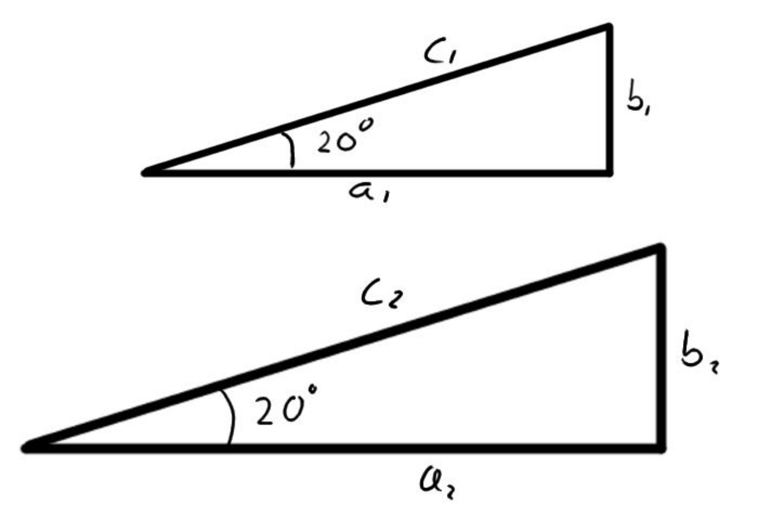
Forhold mellom sider i en trekant

Forholdene mellom sidene i en rettvinklet trekant avhenger kun av vinkelen, ikke størrelsen på trekanten (trekantene er formlike).

Dvs.

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} \qquad \frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2}$$

$$\frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2}$$



Trigonometriske funksjoner

Siden forholdene mellom sidene i en rettvinklet trekant kun avhenger av vinkelen, kan vi definere forholdene som funksjoner av vinkel. Vi kaller disse for sinus, cosinus og tangens.

$$\sin(\theta) = \frac{b}{c}$$

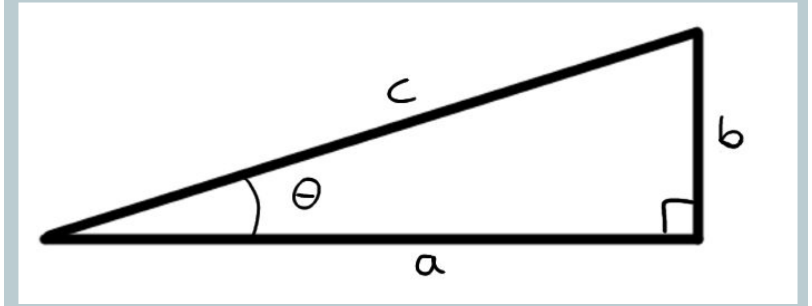
$$\cos(\theta) = \frac{a}{c}$$

$$\tan(\theta) = \frac{b}{a}$$

a: hosliggende katet

b: motstående katet

c: hypotenus



Merk: For å forkorte notasjonen, dropper man ofte parenteser rundt argumentet, dvs.

$$\sin(x) = \sin x$$

Merk: sin, cos og tan gjelder kun for rettvinklet trekanter.

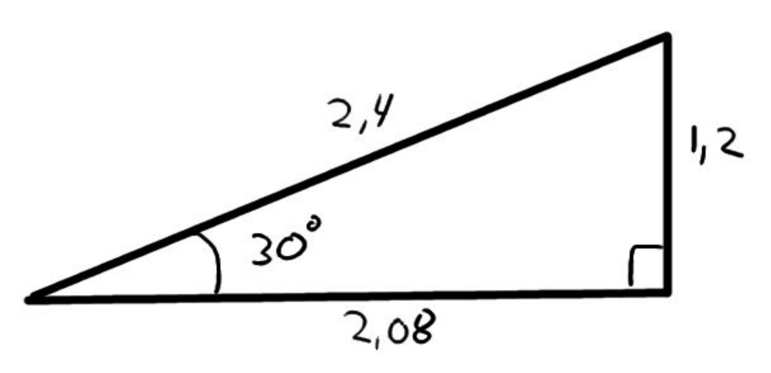
Eksempel

Vi har:

$$\sin(30) = \frac{1}{2} \qquad \frac{b}{c} = \frac{1.2}{2.4} = \frac{1}{2}$$

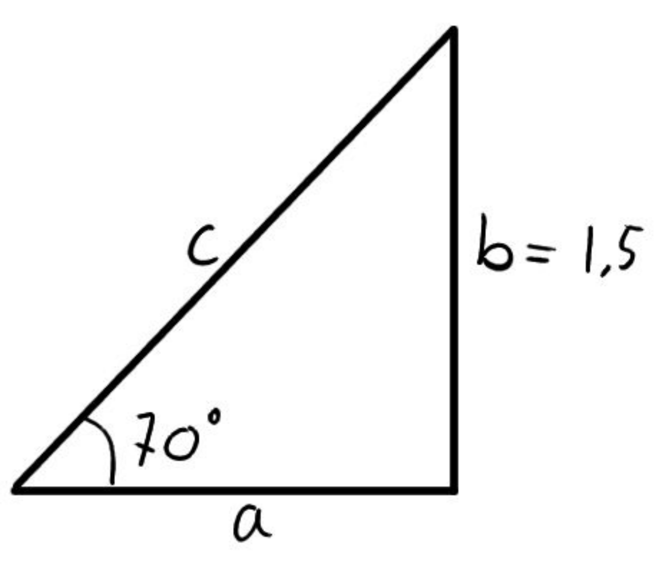
$$\cos(30) \approx 0.87 \qquad \frac{a}{c} = \frac{2.08}{2.4} \approx 0.87$$

$$\tan(30) \approx 0.58 \qquad \frac{b}{a} = \frac{1.2}{2.08} \approx 0.58$$



Eksempel

Finn a og c i trekanten i figuren.



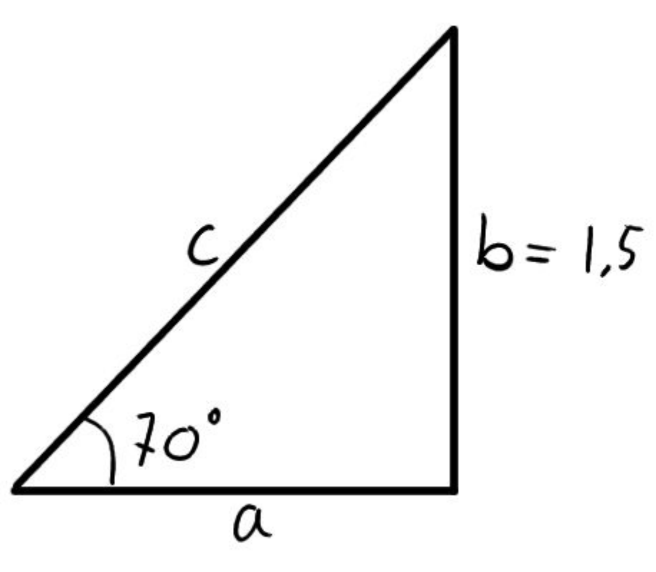
Eksempel - løsning

$$\sin(70) = \frac{b}{c}$$

$$c = \frac{b}{\sin(70)} = \frac{1{,}5}{0{,}9397} \approx \underline{1{,}6}$$

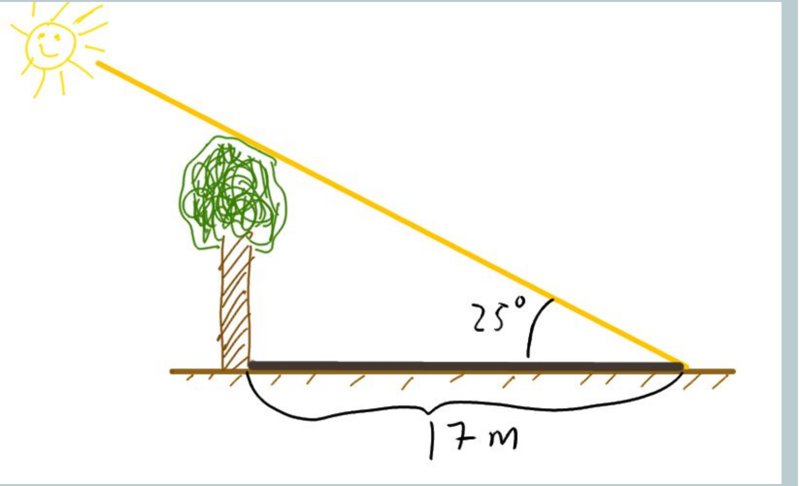
$$\tan(70) = \frac{b}{a}$$

$$a = \frac{b}{\tan(70)} = \frac{1{,}5}{2{,}7475} \approx \underline{0{,}5}$$



Oppgave 2

Sola lyser på et tre slik at solstrålene danner en vinkel på 25 grader med sola relativt til bakken. Du måler skyggen til treet til å være 17 meter. Hvor høyt er treet?



Trigonometriske funksjoner i modellering

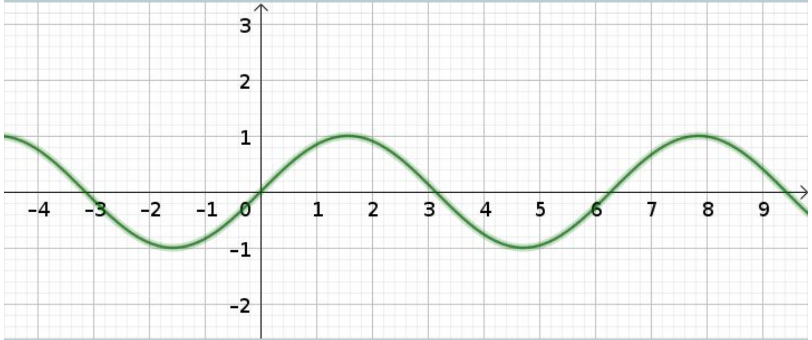
Figuren viser grafen til sin(x) i geogebra.

Grafen tyder på at sin(x) kan være en god kandidat for å beskrive periodiske fenomener, såkalte harmoniske svingninger.

Eksempler:

- Bølger
- Temperatursvingning i løpet av et døgn
- Høyden til sola på himmelen over et år
- Vannstanden i en bukt
- Osv osv...

f(x) = sin(x)



NB: Geogebra bruker radiner som standard ved trigonometriske funksjoner.

Merk: cos(x) likner mye på sin(x). Skriv inn både sin(x) og cos(x) i Geogebra. Hva er forskjellen på grafene?

Utvidet definisjon av trigonometriske funksjoner

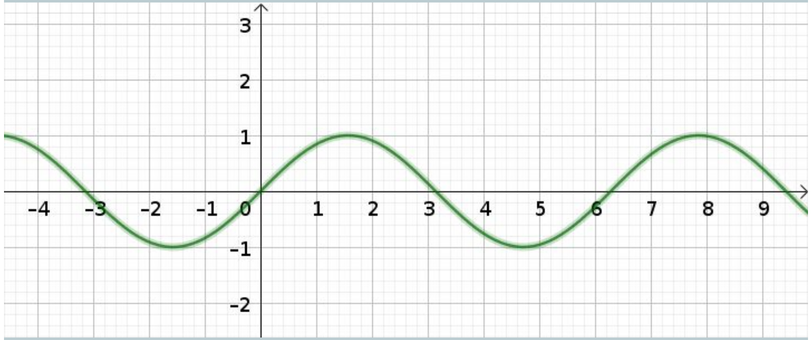
Vår definisjon for sin, cos og tan, gjelder kun fra 0 til 90 grader, mens sin(x) i figuren gjelder for alle x, også negative.

Trenger en ny definisjon på sin og cos.

Krav:

- Den gamle definisjonen må fortsatt fungere.
- Må gjelder for alle verdier av x.

f(x) = sin(x)



NB: Geogebra bruker radiner som standard for trigonometriske funksjoner.

Utvidet definisjon av trigonometriske funksjoner

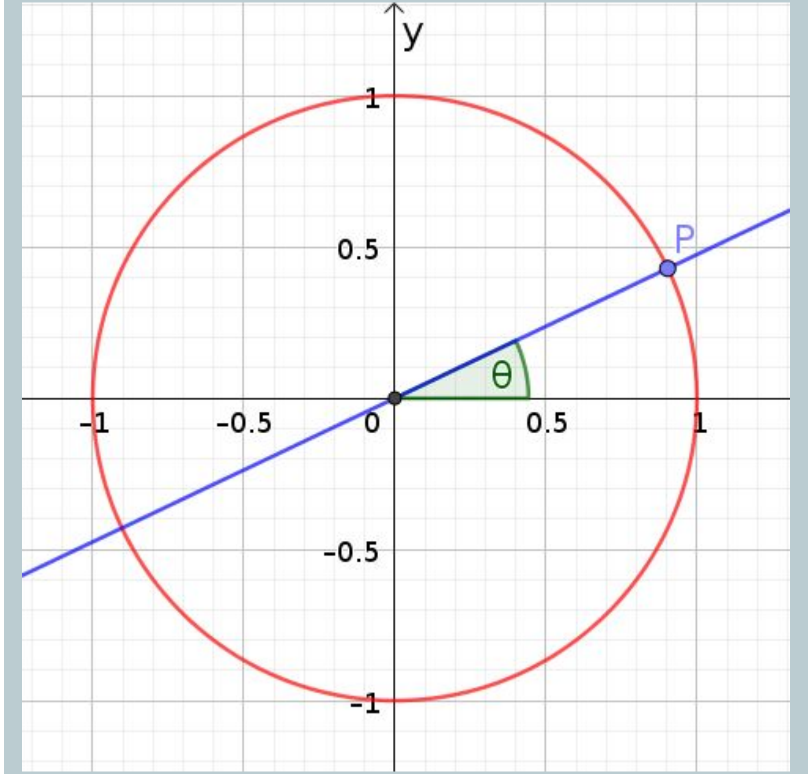
Definisjon:

La P være et punkt på enhettssirkelen som svarer til vinkelen theta mellom x-aksen og linjen som krysser enhetssirkelen i P.

Koordinatene til dette krysningspunktet definers da til å være

$$P = (\cos\theta, \sin\theta)$$

Enhetssirkelen: Sirkel med radius = 1.



Merk: verdimengden til sin og cos er fra -1 til 1

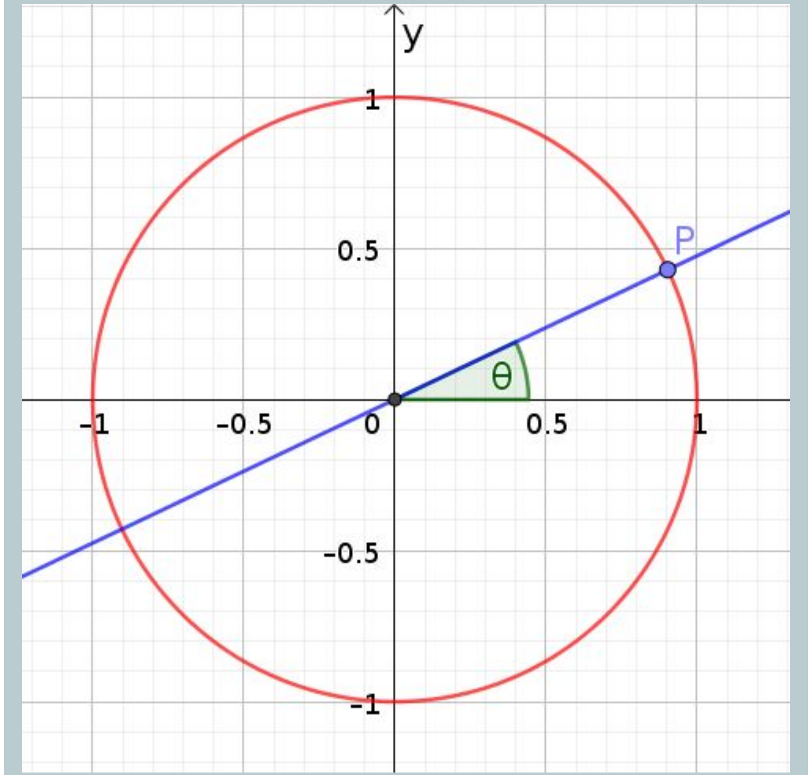
Utvidet definisjon av trigonometriske funksjoner

$$P = (\cos\theta, \sin\theta)$$

Forklaring

cos og sin er definert som henholdsvis x-koordinaten og y-koordinaten til krysningspunktet.

I denne linken kan du se en demonstrasjon av denne definisjonen: https://www.geogebra.org/m/Cb2jWUPS



Merk: verdimengden til sin og cos er fra -1 til 1

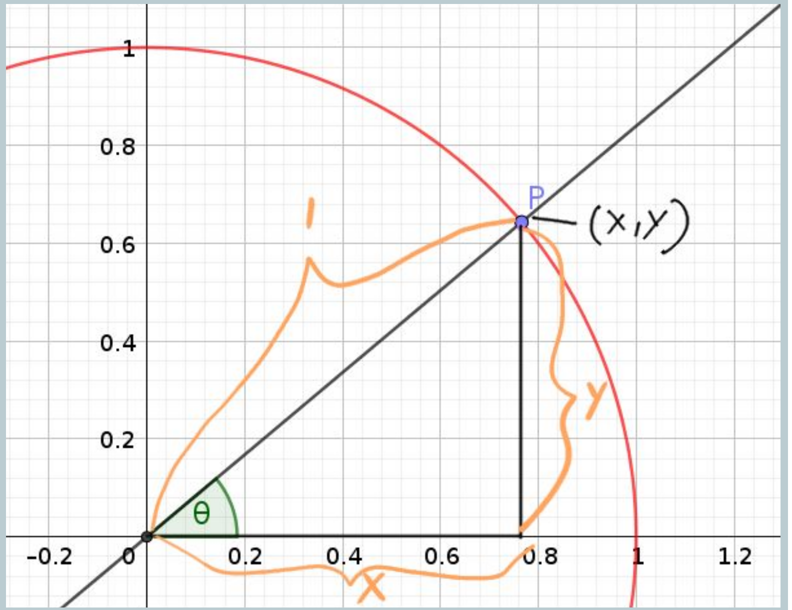
Utvidet definisjon av trigonometriske funksjoner

Legg merke til at den gamle definisjonen også fungerer.

Dersom vi kaller koordinatene til krysningspunktet for (x,y), får vi fra figuren og den tradisjonelle definisjonen for sin og cos:

$$\sin(\theta) = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos(\theta) = \frac{x}{1} = x$$



Eksempler

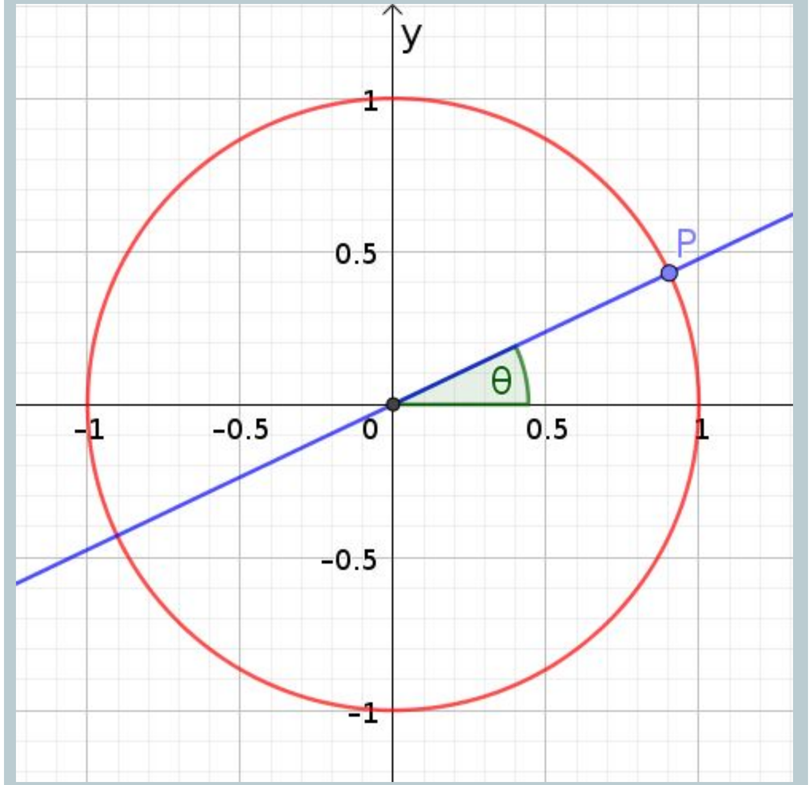
Ved å studere enhetssirkelen, kan vi finne noen trigonometriske identiteter:

$$\cos(\theta) = \cos(-\theta)$$

$$\sin(\theta) = \sin(\pi - \theta)$$

$$\cos(\theta) = -\cos(\pi - \theta)$$

$$\sin(\theta) = -\sin(-\theta)$$



Harmoniske svingninger

Figuren viser en harmonisk svingning (funksjon av tid). Noen begreper:

Likevektslinje:

Linjen som funksjonen svinger rundt

Amplitude:

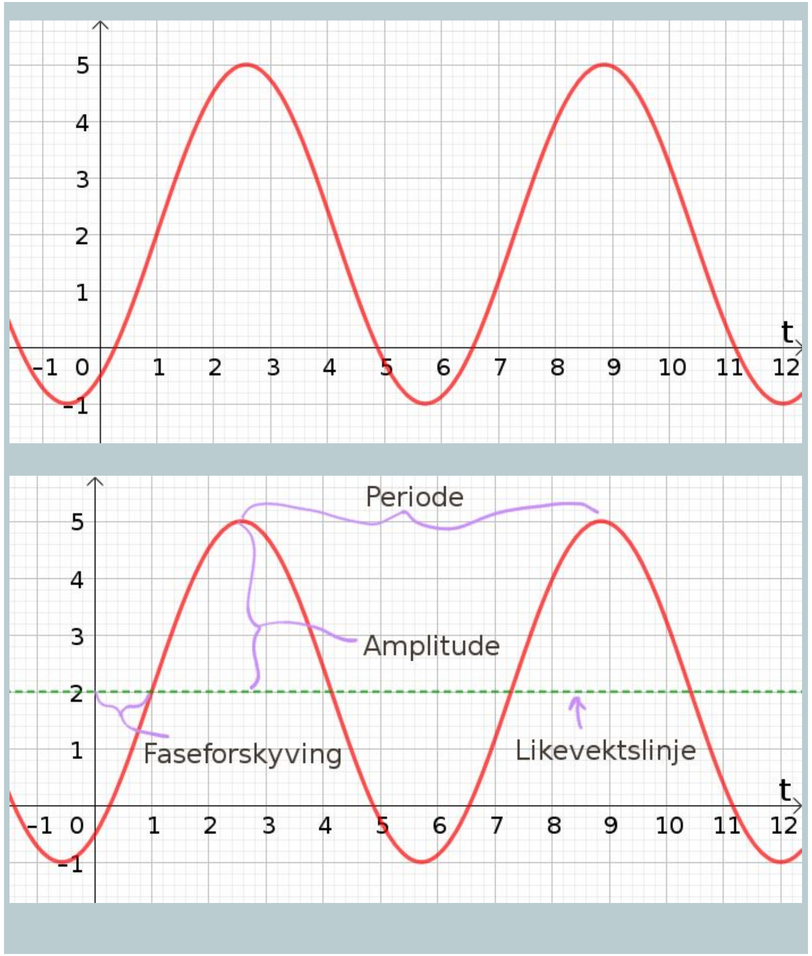
Avstanden fra likevektslinje til topp/bunnpunkt.

Periode:

Hvor lang tid for en hel svingning.

Fase(forskyving):

Hvor langt grafen er forskjøvet mot høyre fra vanlig stilling (figuren viser en sinusfunksjon som vanligvis ligger på likevektslinja når x = 0).



Eksempel

Figuren viser en funksjon på formen

$$f(x) = a\sin(bx + c) + d$$

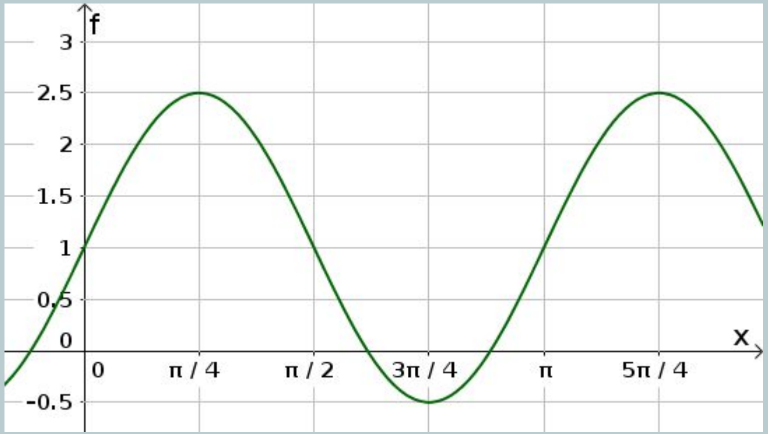
Vi har da:

Amplitude = a

Likevektslinje = d

Periode = 2π / b

Fase = -c/b



I figuren har vi:	Dette gir oss:
Amplitude = 1.5	a = 1.5
Likevektslinje = 1	d = 1
Periode = π	b = 2
Fase = 0	c = 0

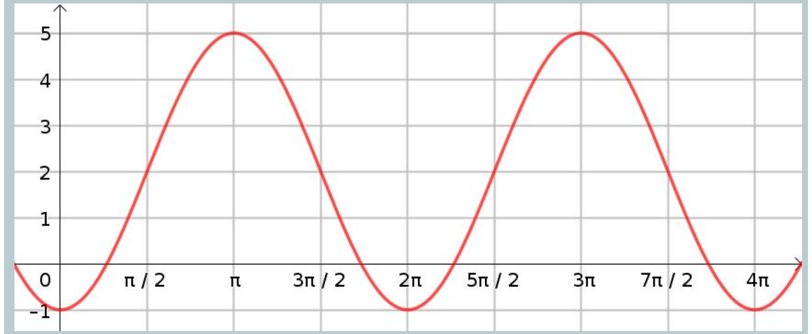
Oppgave 3

Figuren viser en funksjon på formen:

$$f(x) = a\sin(bx + c) + d$$

Bestem alle konstanter.

$$f(x) = a\sin(bx + c) + d$$



Liten avstikker: Kort om inverse funksjoner

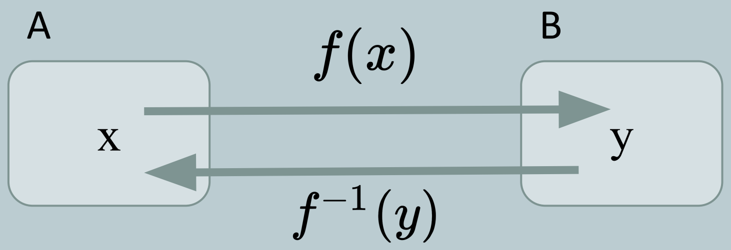
Oppfriskning: En funksjon er en regel som for hvert tall, x, i en tallmengde A, tilordner et tall, y, i en tallmengde B.

Spørsmål: Hva hvis vi har y og ønsker å finne x?

Løsning: Bruk en invers funksjon.

Notasjon: $f^{-1}(x)$

Bruk: En invers funksjon, er en funksjon som gir tilbake x hvis vi putter inn y, dvs. $f^{-1}(y) = x$



Merk: $f^{-1}(y)$ betyr IKKE at vi opphøyer *f* i -1. Dette er bare navnet på funksjonen som oppfører seg som den inverse til *f*.

Arc-funksjonene

Trigonometriske funksjoner har et sett med inverse funksjoner som kalles for "arc"-funksjonene: arcsin, arccos osv. For disse gjelder:

$$\sin(x) = y \Leftrightarrow \arcsin(y) = x$$

$$\cos(x) = y \Leftrightarrow \arccos(y) = x$$

$$\tan(x) = y \Leftrightarrow \arctan(y) = x$$

Merk:

Man kan også bruke notasjonen $\sin^{-1}(x)$ Istedenfor $\arcsin(x)$ men dette kan lett tolkes som sin(x) opphøyd i -1, siden dette er notasjonen man bruker på andre potenser i trigonometriske funksjoner. Dvs.

$$\sin^2(x) = \Big(\sin(x)\Big)^2$$

Denne notasjonen gjelder derimot ikke for -1 siden $\sin^{-1}(x)$ er forbeholdt den inverse sinusfunksjonen. Vi kommer derimot til å bruke arcsin for å unngå misforståelser.

Merk: På kalkulatoren står inverse trigonometriske funksjoner ofte som $\sin^{-1}(x)$

Eksempel

Løs likningen $5 + 2\sin(3x) = 6$

Løsning:

$$5 + 2\sin(3x) = 6$$

$$2\sin(3x) = 1$$

$$\sin(3x) = \frac{1}{2}$$

$$3x = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$x = \underline{\underline{\frac{\pi}{18}}}$$

Praktisk eksempel

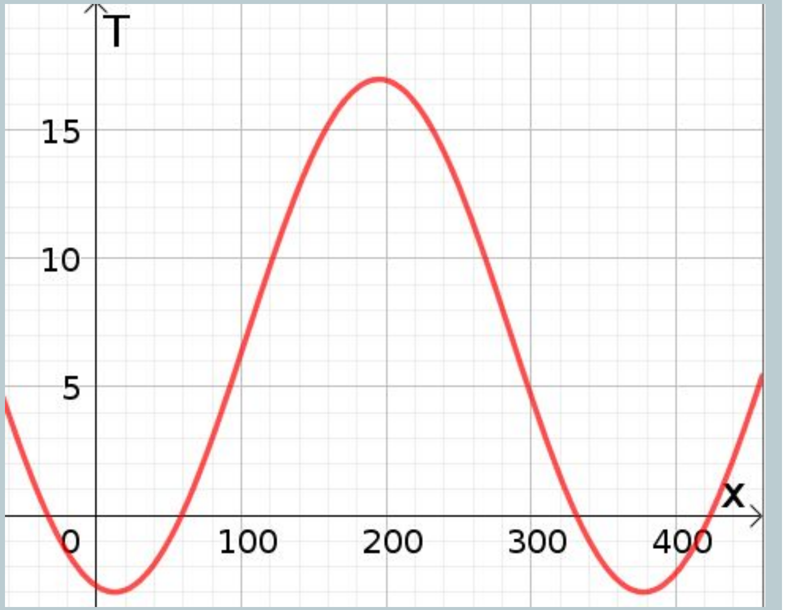
Anta at gjennomsnittstemperaturen i ei bygd kan beskrives ved modellen:

$$T(x) = 7 - 10\cos\left(\frac{2\pi}{365}x - \frac{5\pi}{73}\right)$$

hvor **x** representerer dag, $x \in [1, 365]$

Hvilke dager sier modellen at det vil være en gjennomsnittstemperatur på 10 grader Celsius?

$$T(x) = 7 - 10\cos\left(\frac{2\pi}{365}x - \frac{5\pi}{73}\right)$$



Eksempel - løsning - del 1

Vi skal finne for hvilke x er T(x) = 10

$$7 - 10\cos\left(\frac{2\pi}{365}x - \frac{5\pi}{73}\right) = 10$$

For å gjøre det litt mer ryddig, lager vi en midlertidig variaben, z:

$$z = \frac{2\pi}{365}x - \frac{5\pi}{73}$$

Vi har da: $7 - 10\cos z = 10$

$$-10\cos z = 3$$

$$\cos z = -\frac{3}{10}$$

$$z = \arccos\left(-\frac{3}{10}\right) = 1.8755$$

Nå som vi har en verdi for z, kan vi sette inn igjen uttrykket for x:

$$z = 1.8755$$

$$\frac{2\pi}{365}x - \frac{5\pi}{73} = 1.8755$$

$$\frac{2\pi}{365}x = 2.0907$$

$$x \approx 121 \text{ (1. mai)}$$

Eksempel - løsning - del 2

Dette er derimot ikke den eneste løsningen! Vi har at $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$

som vil si at det er flere "vinkler" som gir samme verdi for cosinus. Siden vi ikke er interesserte i negative dager, kan vi bruke at vinklene $-\theta$ og $2\pi - \theta$ i praksis representerer samme vinkel (studer enhetssirkelen for å se dette).

Dette gir oss utregningen til høyre:

$$\cos(2\pi - z) = -\frac{3}{10}$$

$$2\pi - z = \arccos\left(-\frac{3}{10}\right) = 1.8755$$

$$2\pi - z = 1.8755$$

$$z = 4.4077$$

$$\frac{2\pi}{365}x - \frac{5\pi}{73} = 4.4077$$

$$x \approx 269 \text{ (26. sept.)}$$

Oppgave 4

Løs likningen for **x**. Angi løsningen i radianer.

$$2 + 5\sin(4x) = 6$$

Logaritmiske funksjoner

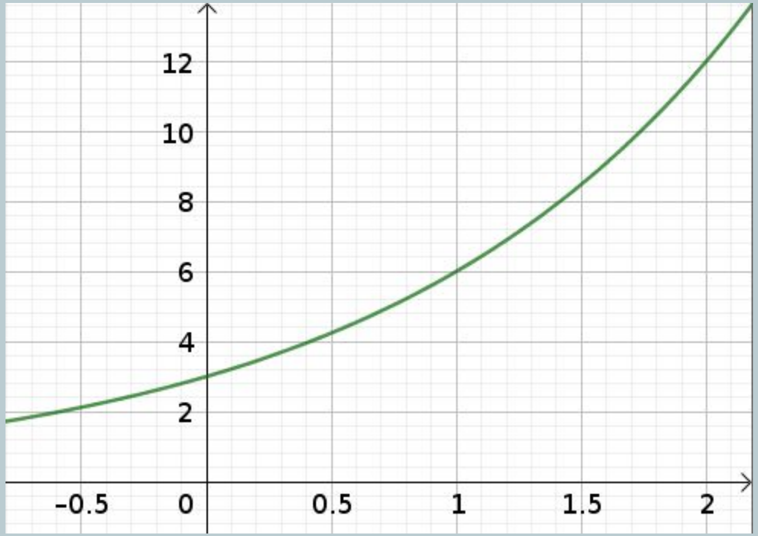
Eksponentialfunksjoner

En eksponentialfunksjon, er en funksjon på formen:

$$f(x) = k \cdot a^x$$

Konstanten a kalles “grunntallet” til eksponentialfunksjonen.

$$f(x) = 3 \cdot 2^x$$



Eulers tall

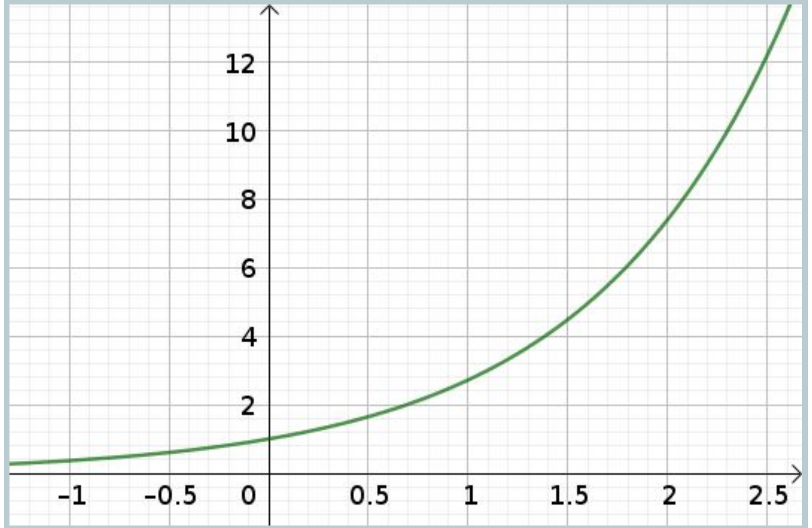
Eulers tall er desidert det viktigste grunntallet for eksponentialfunksjoner. Denne er gitt som:

$$e \approx 2.71828$$

Eulers tall er viktig både innenfor matematikk, fysikk, økonomi, kjemi, biologi og andre fagområder.

Tallet er såpass viktig at innenfor mange fagområder, er ALLE eksponentialfunksjoner skrevet om slik at de har e som grunntall (hvorfor blir mer tydelig når dere kommer til derivasjon).

$$f(x) = e^x$$



Eulers tall

Eulers tall kan defineres på flere måter.

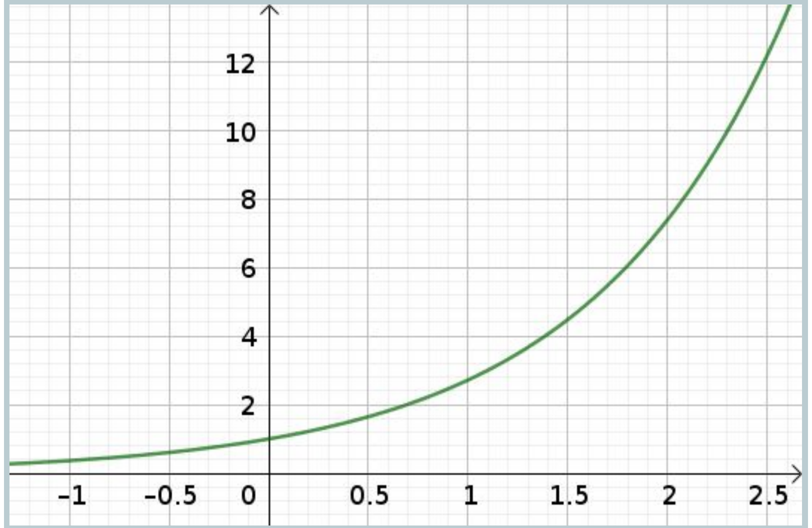
1. Som en grenseverdi:

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

2. Som en uendelig rekke (mer om dette senere i faget):

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots$$

$$f(x) = e^x$$



Eksempel: kontinuerlig rente

Anta at K(t) angir kapital etter t år med en kontinuerlig rente på r. K(t) kan da skrives som:

$$K(t) = K_0 e^{rt}$$

hvor K_0 angir startkapitalen, dvs. kapital ved t=0.

Eksempel

Vi starter med 1000 kroner i banken. Dersom vi har en kontinuerlig rente på 2%, vil vi etter 15 år stå igjen med:

$$K(15) = 1000e^{0.02 \cdot 15} \approx 1349 \text{ Kr}$$

Problemstilling

$$K(t) = K_0 e^{rt}$$

Anta at vi har en oppgave med kontinuerlig rente. Hvordan finner vi ut hvor lang tid det tar før vi har en bestemt kapital?

En løsning: Vi prøver oss frem med forskjellige verdier...

Spørsmål: Kan vi finne en annen løsning?

Behov: Vi må finne en måte å "få ned" t-en fra potensen til grunntallet.

Løsning: Bruke en logaritmisk funksjon.

Logaritmer

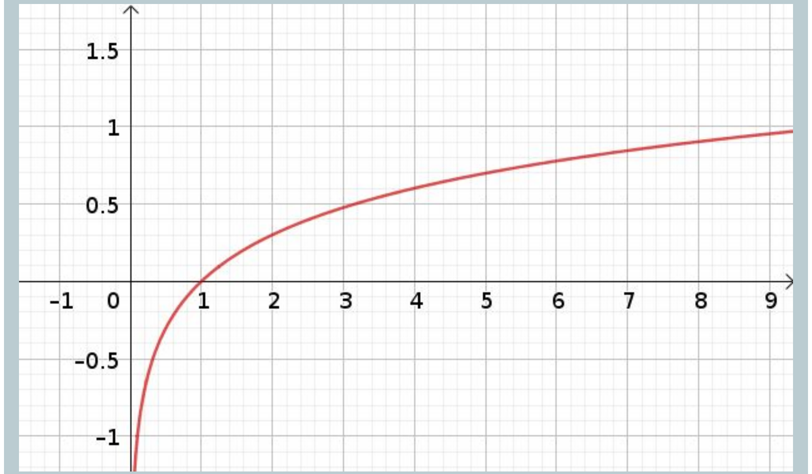
Anta at vi har en funksjon $y = a^x$

Det finnes da en funksjon slik at dersom vi putter inn **y**, så får vi tilbake **x**.

Vi kaller disse funksjonene for **logaritmer** og disse er de inverse funksjonene til eksponentialfunksjoner.

Notasjon: $f(x) = \log_a(x)$

$f(x) = \log_{10}(x)$



Spørsmål: Hva vi du fra grafen si er grenseverdien $\lim_{x \to \infty} \log_{10}(x)$?

Eksempler

$$\log_{10}(100) = 2 \Leftrightarrow 10^2 = 100$$

$$\log_2(5) = 2.3219... \Leftrightarrow 2^{2.3219...} = 5$$

Generelt:

$$a^x = y \Leftrightarrow \log_a(y) = x$$

Muntlig forklaring av eksemplene:

Hva må vi opphøye 10 i for å få 100. Svaret er 2 siden $10^2 = 100$. Så

$$\log_{10}(100) = 2$$

Hva må vi oppøye 2 i for å få 5? Svaret er 2.3219…, så

$$\log_2(5) = 2.3219...$$

Kjente logaritmer

Noen viktige grunntall har egne navn og notasjon for logaritmene.

Den briggske logaritme:

Logaritme med grunntall 10.

$$\log_{10}(x) = \log(x) = \lg(x)$$

Den naturlige logaritme:

Logaritme med grunntall e.

$$\log_{e}(x) = \ln(x)$$

Oppgave 6

Dersom man prøver å ta logaritmen til tallet 0 eller et negativt tall, vil man få en feilmelding. Prøv å gi en forklaring på hvorfor man ikke kan ta logaritmen til disse tallene?

Hint: Prøv å bruk den muntlige forklaringen på slide 39 til å gi en liknende forklaring for logaritmen til disse tallene.

Eksempel

Hvordan hjelper dette oss med vårt opprinnelige problem?

Ta følgende likning

$$e^{x+1} = 3$$

Siden den naturlige logaritmen er den inverse til eksponentialfunksjoner med grunntall e, får vi

$$x + 1 = \ln(3)$$

$$x = \ln(3) - 1 = 0.0986...$$

Eksempel

Vi kan også gå motsatt veg dersom variabelen “sitter fast” i en logartime. Ta f.eks.

$$\ln(2x) = 4$$

Siden logaritmer og eksponentialfunksjoner er inverse av hverandre, får vi:

$$2x = e^4$$

$$x = \frac{1}{2}e^4$$

Logaritmer - regneregler

Anta u,v,a,b er positive konstanter og a ulik 1 og at r er et vilkårlig tall. Da gjelder:

1. $\log_a(uv) = \log_a(u) + \log_a(v)$
2. $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$
3. $\log_a(u^r) = r\log_a(u)$
4. $\log_a(u) = \dfrac{\log_b(u)}{\log_b(a)}$

Logaritmer - regnerelger - bevis for regel 3 - del 1

Ser på to uttrykk

Uttrykk 1:

$$a^{\log_a(u^r)}$$

Dette vil være lik u^r siden eksponentialfunksjoner og logaritmer er inverse funksjoner av hveradre.

Uttrykk 2:

$$a^{r\log_a(u)}$$

Vi kan bruke potensregler til å skrive om dette som

$$\left(a^{\log_a(u)}\right)^r$$

Det som står inni parantesen er lik u siden eksponentialfunksjoner og logaritmer er inverse av hverandre. Vi står da igjen med u^r

Logaritmer - regnerelger - bevis for regel 3 - del 2

Siden begge uttrykk endte opp med å være lik u^r , betyr det at uttrykk 1 og uttrykk 2 er like, dvs.

$$a^{\log_a(u^r)} = a^{r\log_a(u)}$$

Siden uttrykkene er like, er også potensene like, som vil si:

$$\log_a(u^r) = r\log_a(u)$$

Eksempel

Finn λ

$$a^x = e^{\lambda x}$$

Løsning:

Vi tar logaritmen på hver side av likheten og bruker regnereglene for logaritmer

$$\ln(a^x) = \ln\left(e^{\lambda x}\right)$$

$$x \ln(a) = \lambda x \ln(e)$$

Siden ln(e) = 1 (hvorfor det?), får vi: $\lambda = \ln(a)$

Oppgave 7

Bruk logaritmereglene til å forenkle følgende uttrykk så mye som mulig:

$$\ln\left(x^5\right) - \ln\left(1/x^3\right) - 2\ln\left(x^4\right)$$

Oppgave 8

Løs likningen for x

$$3e^{x^2} = 4$$

Hjemmeoppgaver (eller i timen hvis vi får tid)

Oppgave 1: Bruk regneregel 1 og 3 for logaritmer til å bevise regel 2.

Hint: $a/b = a \cdot b^{-1}$

Oppgave 2:

Vis at $$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Hint: Tegn opp en rettvinkla trekant og sett inn definisjonen for sin og cos. Skriv om uttrykket og se om du kan bruke en annen kjent lov om rettvinkla trekanter til å vise at likheten over må gjelde.