Άλγεβρα Α΄ ΓΕΛ

Παράγραφος 2.3- Απόλυτα

ΘΕΩΡΙΑ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Ιορδάνη Χ. Κοσόγλου , Msc μαθηματικού

Εισαγωγή

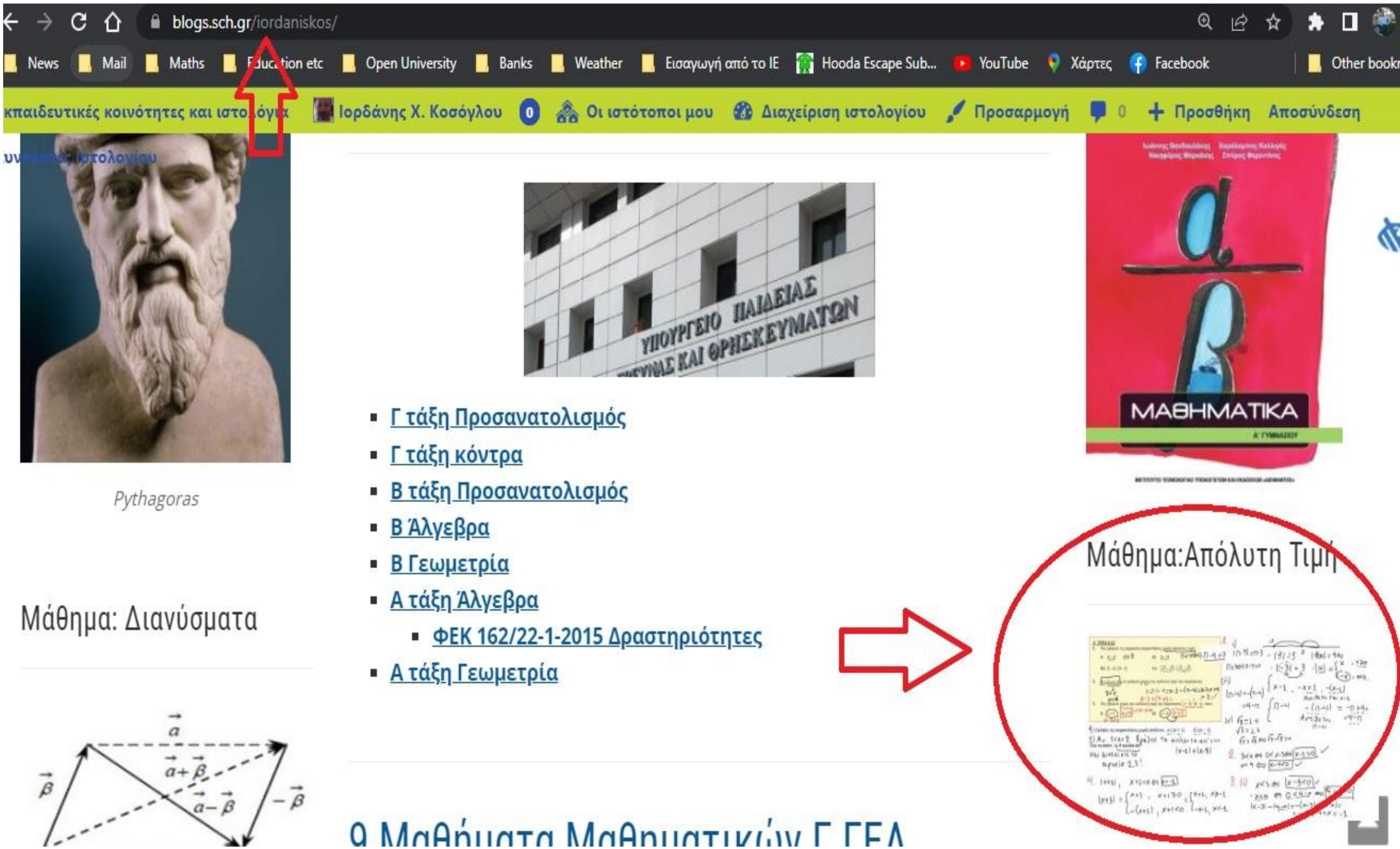
Από 9/11/20 (2^{ο} Lockdown) δουλεύουν τα σχολεία με τηλεκπαίδευση !

Τα προβλήματα πολλά ! Μερικά είναι :

- κακός ήχος,
- κόλλημα οθόνης,
- δυσκολία στην είσοδο για μαθητές & συναδέρφους
- και τέλος πολλοί μαθητές δεν έχουν τον κατάλληλο εξοπλισμό.

Για τους παραπάνω λόγους και για την καλύτερη κατανόησης της τόσο σημαντικής παραγράφου 2.3, δημιουργήθηκε αυτό το αρχείο.

Που βρίσκεται το αρχείο αυτό!



Οδηγίες - σχολικό έτος 22-23
Προτεινόμενες ώρες : 6

§2.3 Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες

Οι μαθητές/-ήτριες έχουν αντιμετωπίσει, στο Γυμνάσιο, την απόλυτη τιμή ενός αριθμού ως την απόστασή του από το μηδέν στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Στην ενότητα αυτή δίνεται ο τυπικός ορισμός της απόλυτης τιμής και αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητές της. Να αξιοποιηθούν οι αποδείξεις των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών για να συζητηθεί αναλυτικά η μέθοδος απόδειξης (ότι η ζητούμενη σχέση είναι ισοδύναμη με μία σχέση που γνωρίζουμε ότι είναι αληθής). Επιπλέον, είναι σκόπιμο να συζητηθεί ως εναλλακτική απόδειξη η εξέταση περιπτώσεων. Για παράδειγμα, για την απόδειξη της ιδιότητας $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ να εξεταστούν οι περιπτώσεις i) α > 0 και β > 0, ii) α > 0 και β < 0, (ή α < 0 και β > 0) και iii) α < 0 και β < 0. Η εξέταση των περιπτώσεων μπορεί να βοηθήσει τους/τις μαθητές/-ήτριες να κατανοήσουν γιατί ισχύει αυτή η ιδιότητα.

Η γεωμετρική ερμηνεία της απόλυτης τιμής ενός αριθμού και της απόλυτης τιμής της διαφοράς δύο αριθμών είναι σημαντική, γιατί βοηθά τους/τις μαθητές/-ήτριες να αποδώσουν νόημα στην έννοια. Η σύνδεση, όμως, της αλγεβρικής σχέσης και της γεωμετρικής της αναπαράστασης δεν είναι κάτι που γίνεται εύκολα από τους/τις μαθητές/-ήτριες και για αυτό απαιτείται να δοθεί σε αυτό ιδιαίτερη έμφαση.

Οδηγίες - σχολικό έτος 22-23

Με αυτή την έννοια προτείνεται να μη διδαχθούν, στη γενική τους μορφή, οι:

$|x-x_0|<\rho \Leftrightarrow x\in(x_0-\rho, x_0+\rho) \Leftrightarrow x_0-\rho<x<x_0+\rho$, και

$|x-x_0|>\rho \Leftrightarrow x\in(-\infty, x_0-\rho)\cup(x_0+\rho,+\infty) \Leftrightarrow x<x_0-\rho \;\; ή \;\; x>x_0+\rho$

επειδή είναι πολύ δύσκολο να γίνουν κατανοητά από τους/τις μαθητές/ριες σ' αυτή τη φάση της αλγεβρικής τους εμπειρίας. Ομοίως να μη διδαχθεί η έννοια του κέντρου και της ακτίνας διαστήματος. Αντίθετα, οι μαθητές/ριες μπορούν να ασχοληθούν με τα παραπάνω μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα (π.χ. η ανίσωση $|x-2|<3$ σημαίνει: «ποιοι είναι οι αριθμοί που απέχουν από το 2 απόσταση μικρότερη του 3;» δηλ. $|x-2|<3 \Leftrightarrow d(x,2)<3 \Leftrightarrow -1<x<5$).

Προτείνεται, όμως, να γίνει διαπραγμάτευση των σχέσεων $|x|<\rho \Leftrightarrow -\rho<x<\rho$ και $|x|>\rho \Leftrightarrow x<-\rho \;\; ή \;\; x>\rho$. Η δραστηριότητα Δ.8 του ΠΣ και το γεωμετρικό μέρος των ασκήσεων 3 και 4 (Β΄ ομάδας) της σελ. 105 μπορούν να υποστηρίξουν την παραπάνω προσέγγιση.

Ορισμός

- Απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού x είναι η απόσταση του απ το 0 στη ευθεία των αριθμών.
- Συμβολίζεται με $|x - 0| = |x| = d(x,0)$ και είναι πάντα μη αρνητικός αριθμός. (≥ 0)

Ισχύουν : $|4| = 4$, $|-2| = 2$, $|\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, $|0|=0$

Άρα :

- αν ο αριθμός είναι θετικός ή μηδέν, είναι ίσος με την απόλυτη τιμή του,
- αν ο αριθμός είναι αρνητικός, τότε……….

Ορισμός Σχολικού Βιβλίου σελ 62

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με $|\boldsymbol{\alpha}|$ και ορίζεται από τον τύπο:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \alpha\nu \quad \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \alpha\nu \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

Άσκηση

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές.

i) $|\pi-3|$ ii) $|\pi-4|$

iii) $|3-\pi|+|4-\pi|$ iv) $|\sqrt{2}-\sqrt{3}|-|\sqrt{3}-\sqrt{2}|$.

Θυμίζω ότι: $\sqrt{2} \cong 1.4$, $\sqrt{3} \cong 1.7$, ***συνεπώς*** $\sqrt{2} < \sqrt{3}$

Εξαγωγή Απόλυτου υπό συνθήκη!

1. Γράψτε την παράσταση $|x-1|$ χωρίς απόλυτη τιμή αν $x > 1$.
2. Γράψτε την παράσταση $|x-1|$ χωρίς απόλυτη τιμή αν $x < 1$.
3. Γράψτε την παράσταση $|x-2|$ χωρίς απόλυτη τιμή αν $x > 3$.
4. Γράψτε την παράσταση $|x-1|$ χωρίς απόλυτη τιμή αν $x < 0$.
5. Γράψτε την παράσταση $|x-1|+|x+2|$ χωρίς απόλυτα αν $-2 < x < 1$.

Εξαγωγή Απολύτου υπό συνθήκη!
Απαντήσεις

1. $x>1$, άρα $x-1>0$, συνεπώς $|x-1|=x-1$
2. **$x<1$, άρα $x-1<0$, $|x-1|=1-x$**
3. $x>3$, άρα $x>2$ οπότε $x-2>0$, $|x-2|=x-2$

4. $x<0$, άρα $x<1$ οπότε $x-1<0$,άρα $|x-1|=1-x$
5. $-2<x<1$, άρα $-2<x$ ΚΑΙ $x<1$

$0<x+2$ ΚΑΙ $x-1<0$

$$|x-1|+|x+2|=1-\cancel{x}+\cancel{x}+2=3$$

Ασκήσεις σχολικού σελίδα 66

2. Αν $3<x<4$, να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή την παράσταση

$$|x-3|+|x-4|$$

3. Να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή την παράσταση $|x-3|-|4-x|$, όταν:

i) $x<3$ **ii)** $x>4$.

Ιδιότητες της Απόλυτης τιμής

- $|\alpha| \geq 0$, για κάθε $\alpha \in R$
- $|\alpha| = |-\alpha|$,για κάθε $\alpha \in R$, όπου α,-α αντίθετοι
- $|\alpha|^2 = \alpha^2$, για κάθε $\alpha \in R$
- $-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$, για κάθε $\alpha \in R$
- $|\alpha| \cdot |\beta| = |\alpha \cdot \beta|$, $\alpha, \beta \in R$
- $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$

$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Δες για α = -2 και β = 3

Ασκήσεις

4. Αν $\alpha \neq \beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $\left|\dfrac{\alpha-\beta}{\beta-\alpha}\right|$.

5. Αν $x \neq 0$ και $y \neq 0$, να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η παράσταση

$$\mathrm{A} = \frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{y}$$

Τράπεζα 2021-2022

Για κάθε x πραγματικό αριθμό με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-10|$ χωρίς απόλυτα. **(μονάδες 10)**

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10}$

(μονάδες 15)

Δίνεται η παράσταση $A = |3x\text{-}6| + 2$, όπου x πραγματικός.

α) Να αποδείξετε ότι :

ι) Για κάθε $x \geq 2$, $A = 3x - 4$.

ιι) Για κάθε $x < 2$, ισχύει $A = 8 - 3x$ **(μονάδες 12)**

β) Αν $x \geq 2$, να αποδείξετε ότι $\frac{9x^2-16}{A} = 3x + 4$ **(μονάδες 13)**

Αν γνωρίζουμε ότι $3 \leq x \leq 5$, όπου x πραγματικός ,

α) Να αποδείξετε ότι $x - 5 \leq 0 < x - 2$ **(μονάδες 10)**

β*) Να λυθεί η ανίσωση : $|x\text{-}2| - |x\text{-}5| = 2$ **(μονάδες 15)**

Εξισώσεις με Απόλυτα

Θα δούμε τις παρακάτω εξισώσεις.

- $|x|=2$
- $|x-2|=4$
- $|x+1|=3$
- $|2x-1|=1$

- $|x+2|=-3$

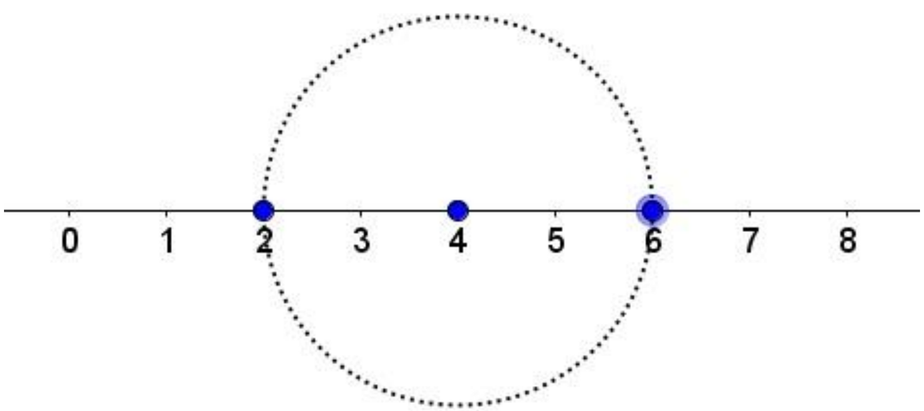
Ανισώσεις με Απόλυτα, παράδειγμα 1ο

Να λυθεί η ανίσωση : $|x-4| < 2$

Γεωμετρική ΛΥΣΗ

- Η ανίσωση ισοδυναμεί με την $d(x,4) < 2$
- Λεκτικά: «ποιος ή ποιοι αριθμοί απέχουν απ το 4 (κέντρο) απόσταση **μικρότερη** από 2 (ακτίνα).»

Άρα , λύση η $x \in (2,6)$



Συνέχεια παραδείγματος 1

- Να λυθεί η ανίσωση : $|\underbrace{x-4}_{\alpha}| < 2$

Αλγεβρική ΛΥΣΗ

- Ο x-4 είναι ένας αριθμός μεταξύ του -2 και του 2.
- Άρα $-2 < x-4 < 2$ ή

  $-2+4 < x\cancel{-4}\cancel{+4} < 2+4$

- Συνεπώς : $2 < x < 6$ ή $x \in (2,6)$

Παράδειγμα 2ο

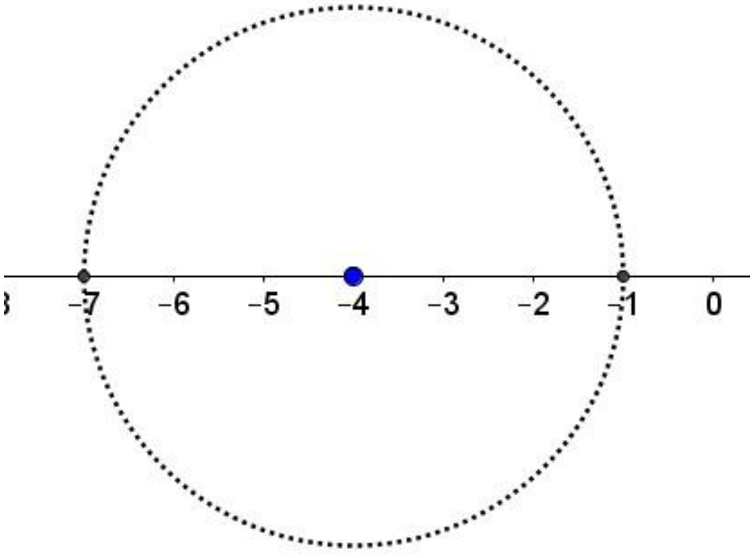
- Να λυθεί η ανίσωση : $|x+4| \leq 3$

Γεωμετρική ΛΥΣΗ

- ❑Η ανίσωση ισοδυναμεί με την $d(x,-4) \leq 3$
- ❑Λεκτικά: «ποιος ή ποιοι αριθμοί απέχουν απ το -4 (κέντρο) απόσταση μικρότερη ή ίση με 3 (ακτίνα).»

Λύση η :

$x \in [-7, -1]$



Συνέχεια παραδείγματος 2

- Να λυθεί η ανίσωση : $|x+4| \leq 3$

Αλγεβρική ΛΥΣΗ

- Ο **(x+4)** είναι ένας αριθμός μεταξύ του -3 και του 3.
- Άρα $-3 \leq x+4 \leq 3$ ή

  $-3 - 4 \leq x+4-4 \leq 3-4$

- Συνεπώς : $-7 \leq x \leq -1$ ή $x \in [-7,-1]$

Παράδειγμα 3ο

- Να λυθεί η ανίσωση : $|x-4| < -2$

<u>Αλγεβρική ΛΥΣΗ</u>

- Η ανίσωση είναι ΑΔΥΝΑΤΗ , γιατί :
- $|x-4| \geq 0$ και $-2 < 0$.

Παράδειγμα 4ο

- Να λυθεί η ανίσωση : $|x-4| > 2$

Γεωμετρική ΛΥΣΗ

- ❑Η ανίσωση ισοδυναμεί με την $d(x,4) > 2$
- ❑Λεκτικά: «ποιος ή ποιοι αριθμοί απέχουν απ το 4 (κέντρο) απόσταση μεγαλύτερη από 2 (ακτίνα).»

- ❑Η λύση είναι : $x \in (-\infty,2) \cup (6,+\infty)$

Συνέχεια παραδείγματος 4

- Να λυθεί η ανίσωση : $|x-4| > 2$

Αλγεβρική ΛΥΣΗ

- Ο $x-4$ είναι ένας αριθμός μεγαλύτερος του 2 ή μικρότερος του -2.
- Άρα $x-4 < -2$ **ή** $x-4>2$

  $x < 4-2$ ή $x > 6$

  $x < 2$ ή $x > 6$

- Συνεπώς η λύση είναι : $x \in(-\infty,2)\cup(6,+\infty)$

Παράδειγμα 5ο

- Να λυθεί η ανίσωση : $|x-1| > -2$

<u>Αλγεβρική ΛΥΣΗ</u>

- Η ανίσωση είναι ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ, δηλαδή ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό , γιατί ;

- $|x-1| \geq 0$ και $-2 < 0$.

Παράδειγμα 6ο

- Αν $x \in [-5, 7]$, γράψτε την ανίσωση που έχει αυτή τη λύση.

ΛΥΣΗ

- Μήκος διαστήματος : 12 , **(7 – (-5)) = 7+5=12**
- Ακτίνα : 6
- Απ το 7 αν κατέβω 6 φτάνω στο 1.
- Απ το -5 αν ανέβω 6 φτάνω στο 1 (ΚΕΝΤΡΟ).
- Άρα η ζητούμενη ανίσωση είναι : $|x - 1| \le 6$
- Όλοι οι αριθμοί που απέχουν απ το 1 απόσταση <u>μικρότερη ή ίση</u> με 6 ανήκουν στο διάστημα [-5,7]

Παράδειγμα 7ο

- Αν $x \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$, γράψτε την ανίσωση που έχει αυτή τη λύση.

ΛΥΣΗ

- Μήκος από 1 έως και 5 : 4 , **(5-1) = 4**
- Ακτίνα : 2
- Απ το 5 αν κατέβω 2 φτάνω στο 3.
- Απ το 1 αν ανέβω 2 φτάνω στο 3 (ΚΕΝΤΡΟ).
- Άρα η ζητούμενη ανίσωση είναι : $|x - 3| > 2$
- Όλοι οι αριθμοί που απέχουν απ το 3 απόσταση μεγαλύτερη από 2 ανήκουν στο διάστημα

$$(-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$$

Ασκήσεις για σας !

1) Να λυθούν οι ανισώσεις :

- $|x| < 4$
- $|x| \geq 1$
- $|x+2| < 4$
- $|2x+3| > 5$
- $|x+6| \leq 3$
- $|2x-5| < 5$
- $|x-6| < -4$
- $|2x-3| \geq -1$

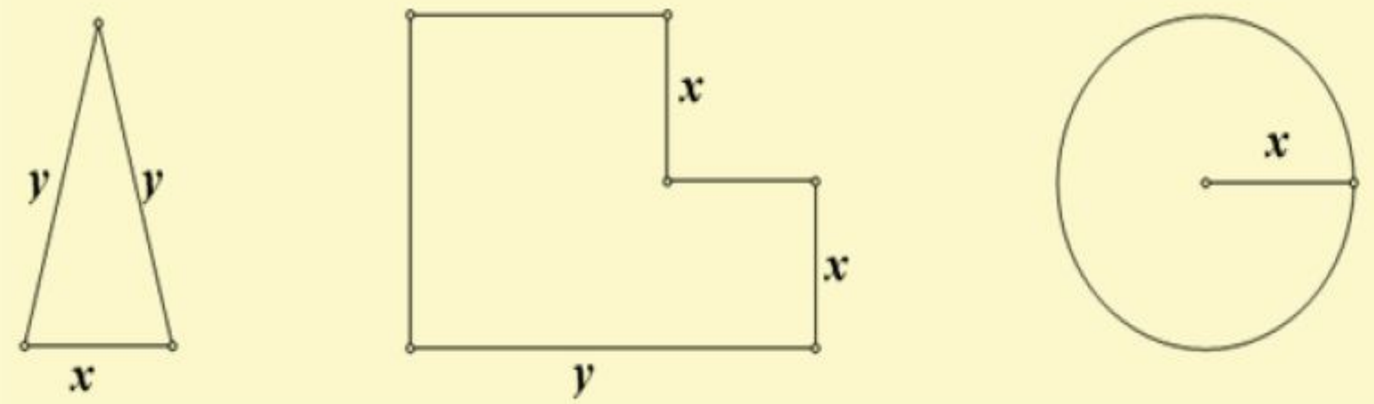
Άλλη μια Άσκηση !

2) Να βρεθεί η ανίσωση απ την οποία προκύπτουν οι λύσεις :

- ✔ $x \in (-\infty, 0) \cup (6, +\infty)$
- ✔ $x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$
- ✔ $x \in (-\infty, -10) \cup (4, +\infty)$
- ✔ $x \in [-3 , 3]$
- ✔ $x \in (-6 , 2)$
- ✔ $x \in [-5 , 15]$

Άσκηση 5 σελίδας 68

5. Αν $|x-2|<0,1$ και $|y-4|<0,2$, να εκτιμήσετε την τιμή της περιμέτρου των παρακάτω σχημάτων:

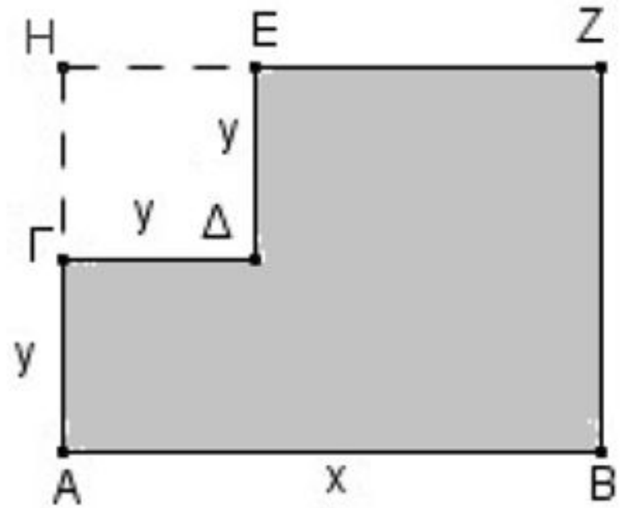


Για το τρίγωνο Οκ , το 2ο σχήμα είναι παρόμοια με άσκηση τράπεζας, δες επόμενη διαφάνεια, για το 3ο σχήμα , θυμάσαι μήκος κύκλου ;Αν όχι είναι,

Μήκος κύκλου ακτίνας x : 2πx

Άσκηση Τράπεζας

12. Απ το ορθογώνιο ΑΒΖΗ αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y.



α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ δίνεται απ τη σχέση : $\Pi = 2x+4y$ **(μονάδες 10)**

β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος. **(μονάδες 15)**

Η Ασκηση! (Μοντελοποίηση)

6. Η διάμετρος ενός δίσκου μετρήθηκε και βρέθηκε 2,37*dm*. Το λάθος της μέτρησης είναι το πολύ 0,005*dm*. Αν D είναι η πραγματική διάμετρος του κύκλου, τότε:

i) Να εκφράσετε την παραπάνω παραδοχή με τη βοήθεια της έννοιας της απόστασης

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή D.

$$|D-2.37|\leq 0.005$$

3 Ασκήσεις - ΤΘΔΔ 2021

Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί την σχέση :

$$d(x,5) \leq 9$$

i) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά. **(μονάδες 5)**
ii) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών , να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x. **(μονάδες 5)**
iii) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος β). **(μονάδες 10)**
iv) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος γ) και να δείξετε ότι : $|x+4|+|x-14| = 18$ **(μονάδες 5)**

Αν ο x είναι πραγματικός και ικανοποιεί την σχέση : $|x+1| < 2$,
α) Να δείξετε ότι $-3 < x < 1$ **(μονάδες 12)**
β) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $K = \dfrac{|x+3|+|x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x . **(μονάδες 13)**

α) Να λυθεί η ανίσωση $|x-3| \leq 5$ **(μονάδες 7)**
β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης πάνω στον άξονα των πραγματικών και να δώσετε γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος. **(μονάδες 5)**
γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους x που είναι λύσεις της ανίσωσης. **(μονάδες 5)**
δ) Να βρεθεί το πλήθος των ακεραίων που ικανοποιούν την ανίσωση : $||x|-3| \leq 5$. Αιτιολογήστε την απάντησης σας. **(μονάδες 8)**

Αν έχετε απορίες , μην διστάζετε!

Καλή συνέχεια σε όλους σας με υγεία!