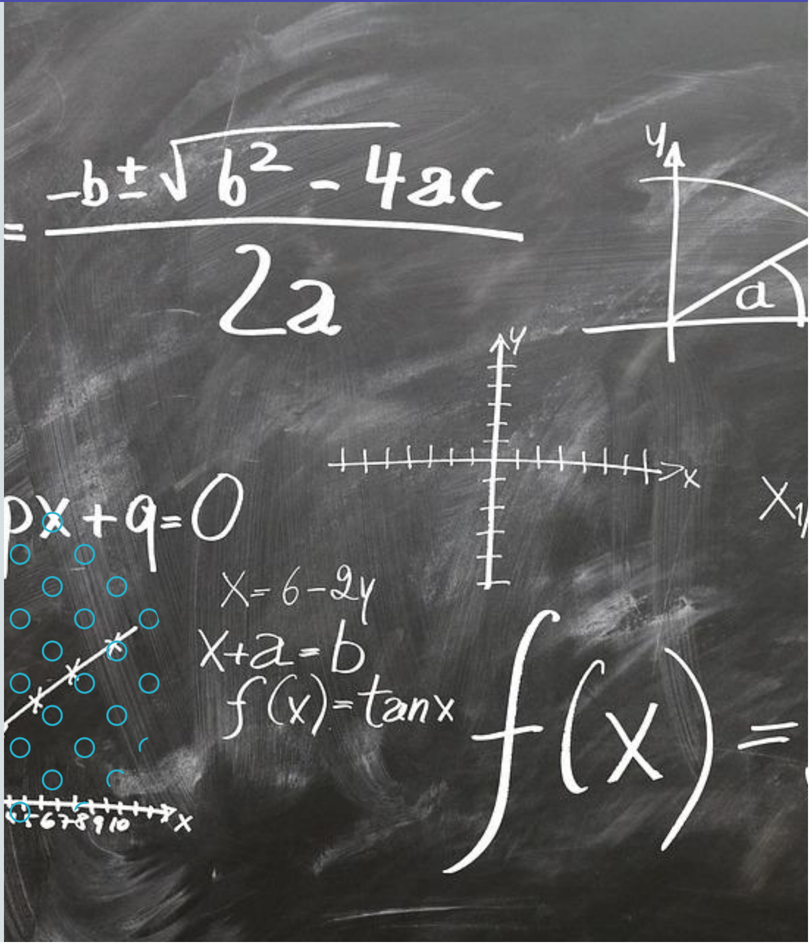
Universitetet i Sørøst-Norge

Grenseverdier og kontinuitet

Kjetil Liestøl Nielsen
Førsteamanuensis
Institutt for matematikk og naturfag



Dagens tema

- Kort om matematisk bevisføring
- Grenser og kontinuitet

Læringsmål:

- Forstå forskjellen på talleksempler og et matematisk bevis.
- Forstå hva som menes med en kontinuerlig funksjon.
- Kunne bruke den formelle definisjonen på en grenseverdi til å regne ut enkle grenseverdier.
- Forstå hvordan et sett med regneregler rundt grenser bygges opp fra den formelle definisjonen.
- Kunne bruke reglene for grenseverdier til å regne ut grenseverdier av rasjonale- og polynomfunksjoner.

Matematisk bevisføring

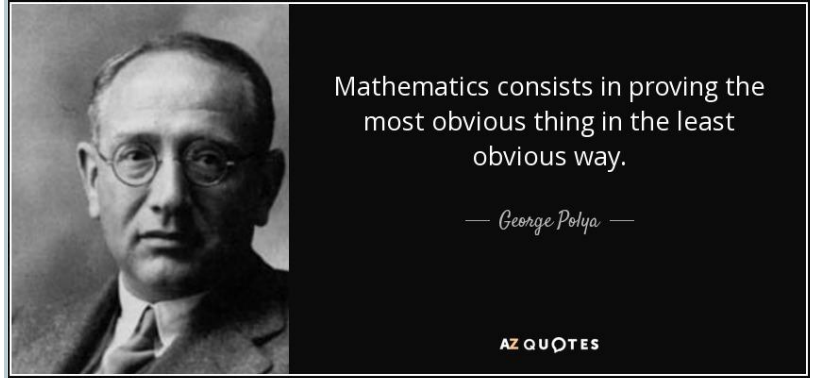
Matematisk bevisføring

Matematikk er språket og verktøyet vi bruker for å forstå universet. For å kunne bruke et matematisk verktøy, f.eks. et teorem, må denne bevises matematisk.

Eksempel på matematiske bevisformer:

- Direkte bevis
- Reduction ad absurdum
- Bevis ved induksjon (mer om denne senere)

George Polya (1887 - 1985)



NB: Ofte kan en matematisk påstand se ut til å stemme, men der det finnes tilfeller hvor det faktisk ikke stemmer. Matematiske beviser er derfor viktige for å kunne bruke påstandene. Når en påstand er bevist, kaller vi det for et **teorem** eller læresetning.

Bilde fra:
https://www.azquotes.com/quote/732018?ref=mathematical-proof

Eksempel: Direkte bevis

Det vi skal bevise følger direkte ved resonnering og bruk av definisjoner, aksiomer og teorem.

Merk: Et matematisk bevis krever at vi har matematiske definisjoner, aksiomer og teorem. Uten disse kan vi heller ikke bevise.

Påstand:

Summen av to partall er også et partall.

Talleeksempler:

$2+2 = 4$, $2+4 = 6$, $10 + 4 = 14$, $20 + 10 = 30$

Merk: Dette er IKKE et bevis, kun eksempler. Påstanden gjelder for ALLE partall.

Matematisk bevis (direkte bevis):

Anta x og y er partall. Vi kan da skrive dem på formen $x = 2a$ og $y = 2b$, hvor a og b er vilkårlige heltall. Summen av x og y blir da:

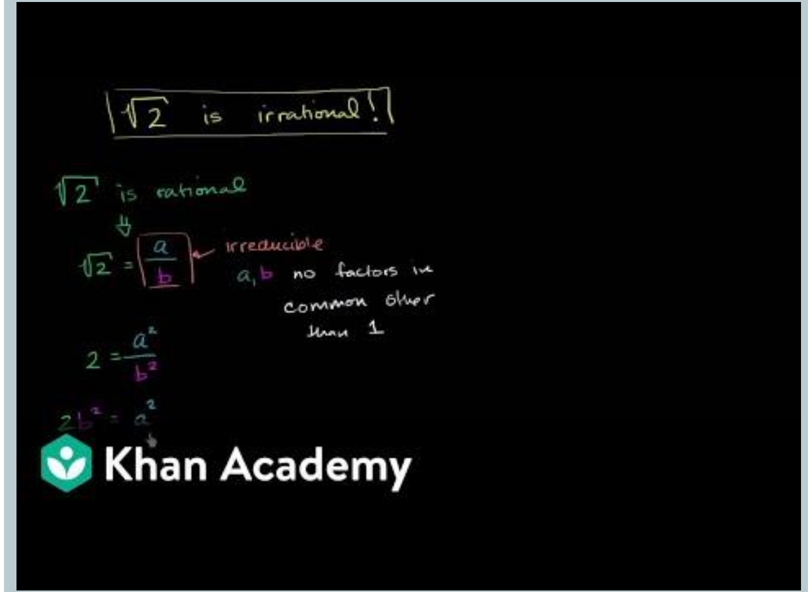
$$x + y = 2a + 2b = 2(a + b) = 2c$$

Siden a og b er heltall, vil også c være et heltall. Summen av x og y kan skrives som 2 ganger et heltall, og er dermed også et partall. Q.E.D

Reductio ad absurbum

Også kalt “bevis ved motsigelse”. Vi antar at det motsatte av det vi skal bevise gjelder og ender opp med en motsigelse.

I videoen til høyre brukes denne bevisformen til å bevise at roten av 2 er et irrasjonalt tall.



Video fra Kahn Academy

Hvorfor skal elevene bevise?

Den nye læreplanen i matematikk fokuserer på mye de matematiske prosessene.

Bevisføring er selve sjelen i matematikk og matematiske prosesser.

MEN: Elevene må også bli opplæring i å argumentere og bevise matematisk.

Elevene skal både lære AV å argumentere og resonnere, og de må lære Å argumentere og resonnere.

Fra nye læreplan:

"Resonnering i matematikk handlar om å kunne følgje, vurdere og forstå matematiske tankerekkjer. Det inneber at elevane skal forstå at matematiske reglar og resultat ikkje er tilfeldige, men har klare grunngivingar. Elevane skal utforme eigne resonnement både for å forstå og for å løyse problem. Argumentasjon i matematikk handlar om at elevane grunngir framgangsmåtar, resonnement og løysingar og beviser at dei er gyldige."

Grenseverdier og kontinuitet

Fra tidligere

I MG2MA1 så dere på grenseverdier og brukte dem til å finne asymptoter til funksjoner.

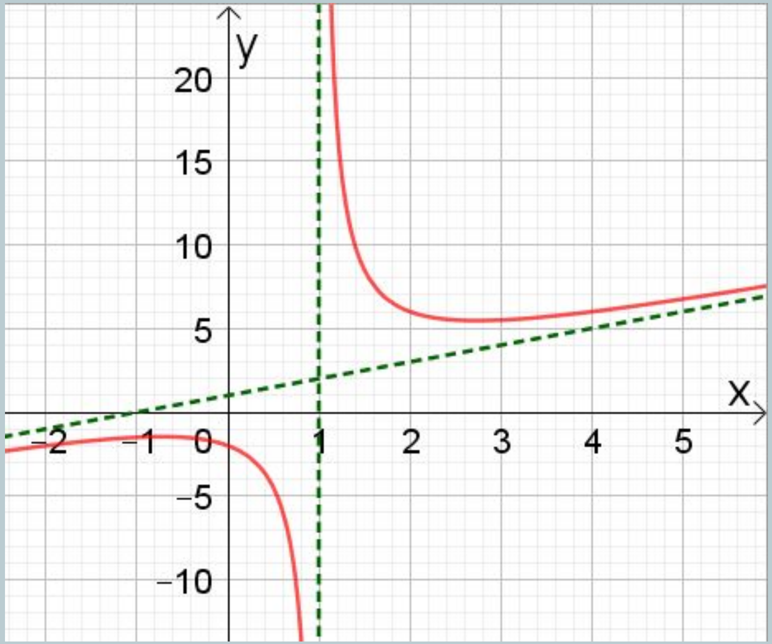
Vi skrev da, f.eks.:

$$f(x) \to \infty \quad \text{når } x \to 1$$

Ny notasjon:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \infty$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$$



Flere eksempler

A: Når x går mot uendelig, går f(x) også mot uendelig. Vi skriver dette som

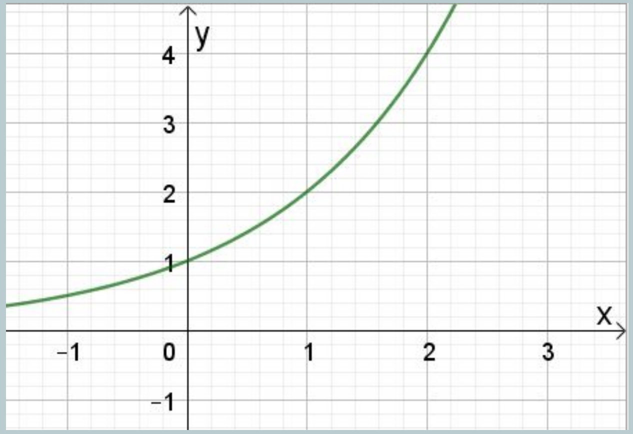
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

B: Når x går mot uendelig, går f(x) mot 1. Vi skriver dette som

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$$

Merk: I B vil f(x) aldri bli LIK 1, men f(x) NÆRMER seg 1 etterhvert som x øker.

A



B

Ensidige grenser

En grenseverdi kan avhenge av hvilken side vi kommer fra.

For funksjonen, f(x), har vi:

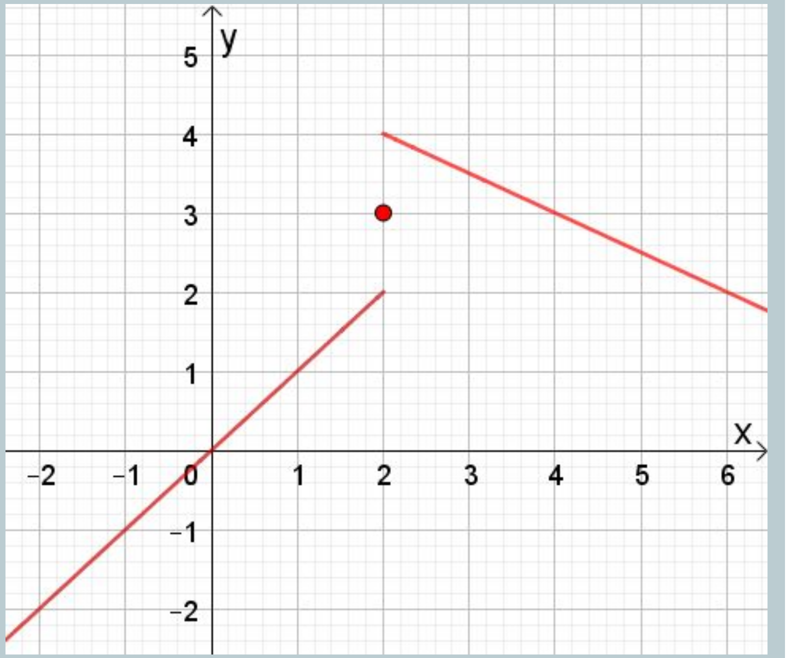
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$$

$$f(2) = 3$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$$

Merk: Vi bruker + og - i potensen for å markere om vi kommer fra henholdsvis høyre og venstre. Er grensene like, uavhengig av side kommer fra, dropper fortegn i potensen..

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{hvis } x < 2 \\ 3 & \text{hvis } x = 2 \\ -\frac{1}{2}x + 5 & \text{hvis } x > 2 \end{cases}$$



Grenseverdier for kontinuerlige funksjoner

Hvordan regne ut grenseverdier der x går mot en verdi a? Dvs. hvordan regner vi ut $\lim_{x \to a} f(x)$?

Svar: Dersom en funksjon er kontinuerlig, vil

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

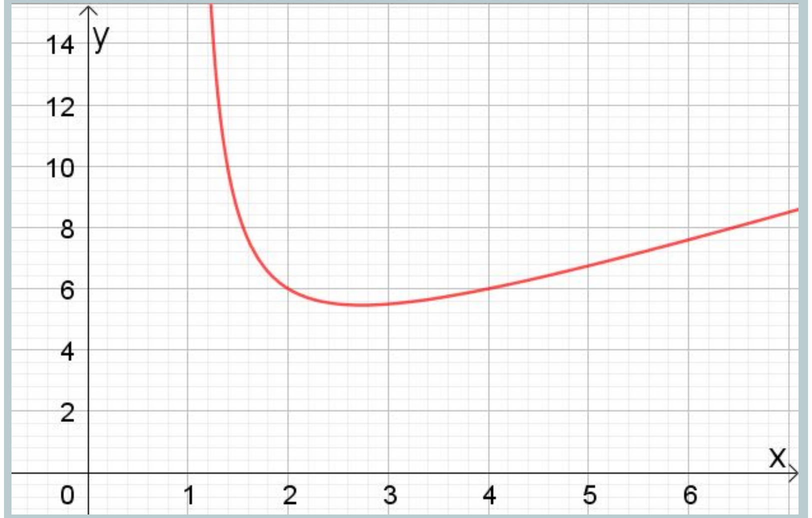
Betydning: Vi kan regne ut grenseverdien ved å sette inn x = a i funksjonen dersom den er kontinuerlig.

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$$

Eksempel 1

Regn ut grenseverdien $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2}{x - 1}$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$$



Eksempel 1

Oppg 1

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+2}{x-1} = \frac{2^2+2}{2-1} = \frac{4+2}{1} = \frac{6}{1} = \underline{\underline{6}}$$

$f(x)$

Kontinuitet

Men: hva vil det si at en funksjon er kontinuerlig?

Ofte brukt: En funksjon er kontinuerlig dersom grafen er “glatt”.

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$$

Kontinuitet - definisjonsproblem

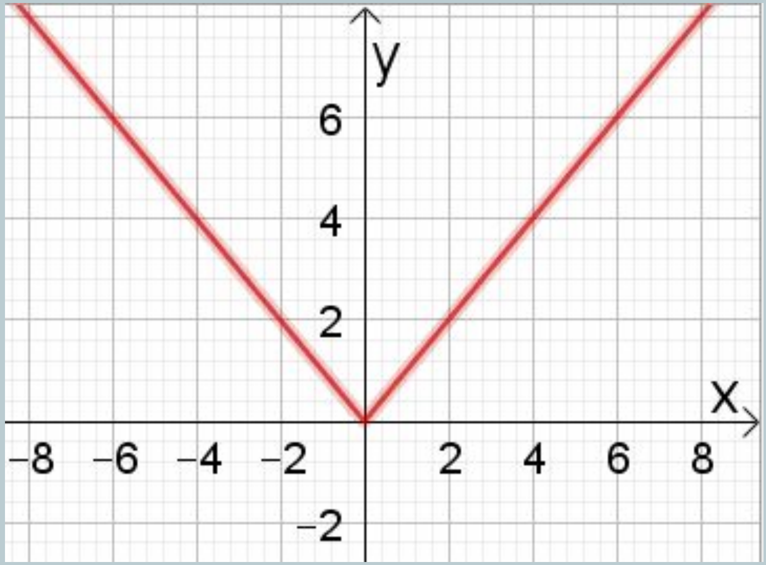
Figuren til høyre viser grafen til $f(x) = |x|$

Spørsmål: Er denne funksjonen kontinuerlig?

Løsning: Ja, den er kontinuerlig. MEN: mange vil si at den ikke er "glatt".

Nytt forslag på definisjon: En funksjon er kontinuerlig dersom du kan "følge grafen med pennen uten å måtte løfte pennen".

$$f(x) = |x|$$



Kontinuitet - definisjonsproblem

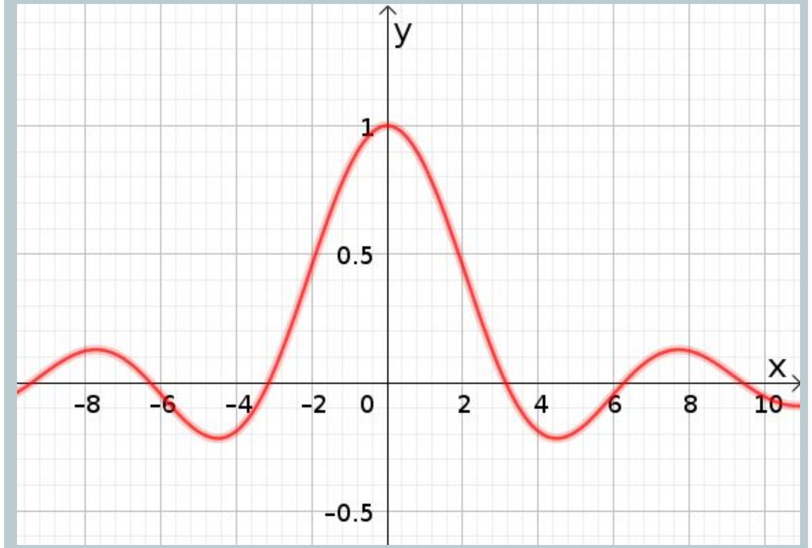
Figuren til høyre viser grafen til $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

Spørsmål: Vil du fra grafen si at dette er en kontinuerlig funksjon?

Løsning: Funksjonen er ikke kontinuerlig i x = 0 siden den ikke er definert der (kan ikke dele på null). Men man klarer fint å "følge grafen uten å løfte pennen" for alle verdier av x...

Konklusjon: Trenger en tydelig, og matematisk, definisjon.

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$



Merk: Dette er et eksempel der funksjonsverdien i **x = 0** ikke eksisterer, men der grenseverdien **x -> 0** eksisterer.

Kontinuitet - definisjon

En funksjon, f(x), er kontinuerlig i x = a dersom

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Problem: Dette var jo akkurat det vi brukte for å regne ut grenseverdien innledningsvis. Vi kan ikke bruke at en funksjon er kontinuerlig til å vise at den er kontinuerlig...

Konklusjon: Vi trenger andre måter å regne ut grenseverdier. Da trenger vi også en definisjon.

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$$

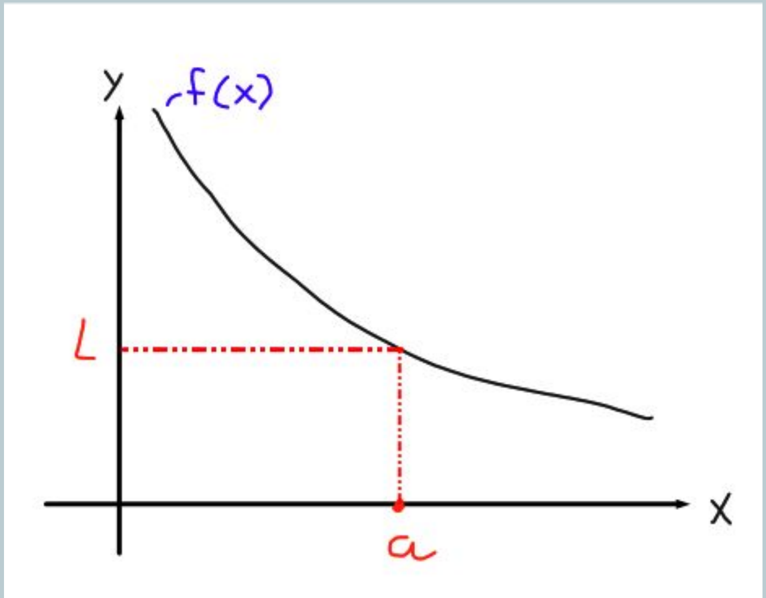
Grenseverdi - definisjon

Vanlig formulert definisjon:

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ betyr at:

Når x nærmer seg a, vil f(x) nærme seg L.

Problem: Definisjonen er ikke 100% tydelig. Det er flere måter å tolke “nærmer seg”.



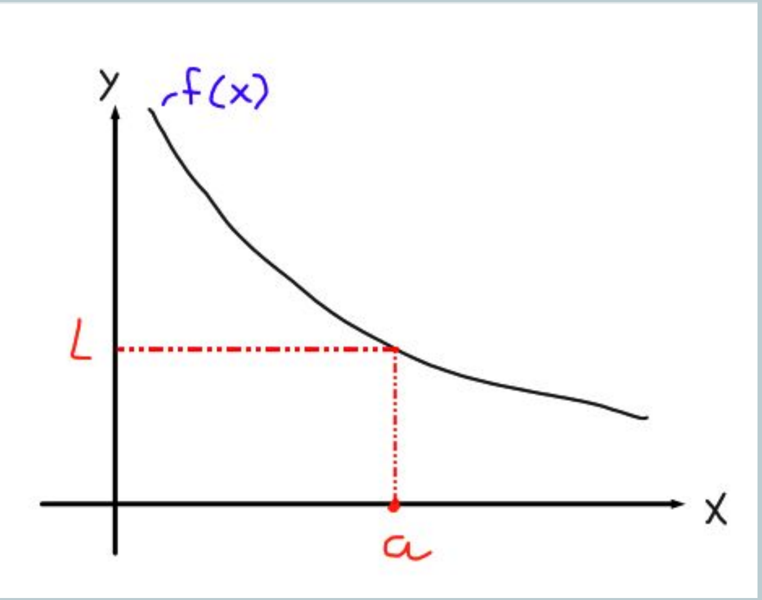
Mer nøyaktig definisjon

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ betyr at:

Vi kan gjøre at verdiene til f(x) kan komme så nær L som vi bare ønsker bare ved å gjøre x tilstrekkelig nær a.

Problem med definisjonen:

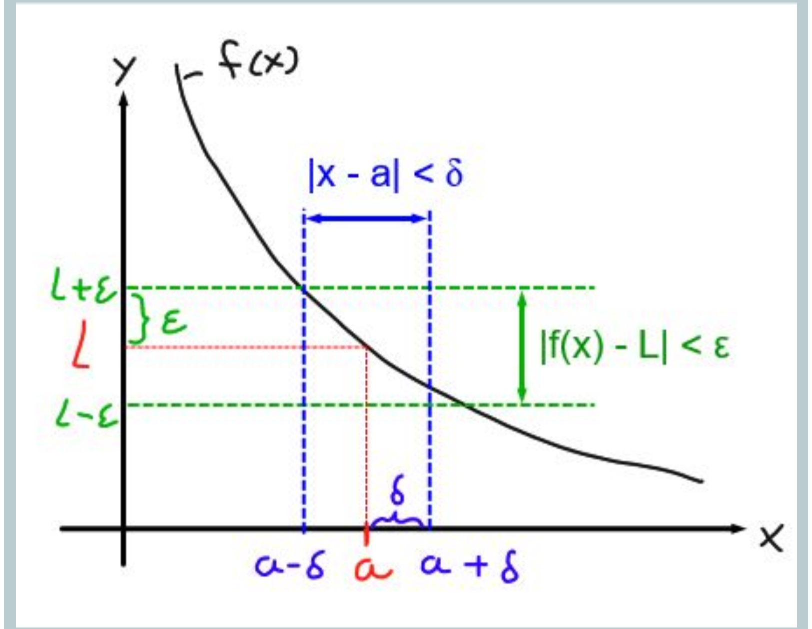
Hvordan kan vi matematisk teste dette? Vi trenger en matematisk formulert definisjon som vi kan etterprøve for å bevise at grenser eksisterer.



Formell matematisk definisjon

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ betyr at:

for hvert tall **ε > 0** finnes det et tall **δ > 0** slik at vi for alle **x ≠ a** har at **|x - a| < δ** medfører **|f(x) - L| < ε**.



* Vi antar at x er innenfor definisjonsmengden til f(x).

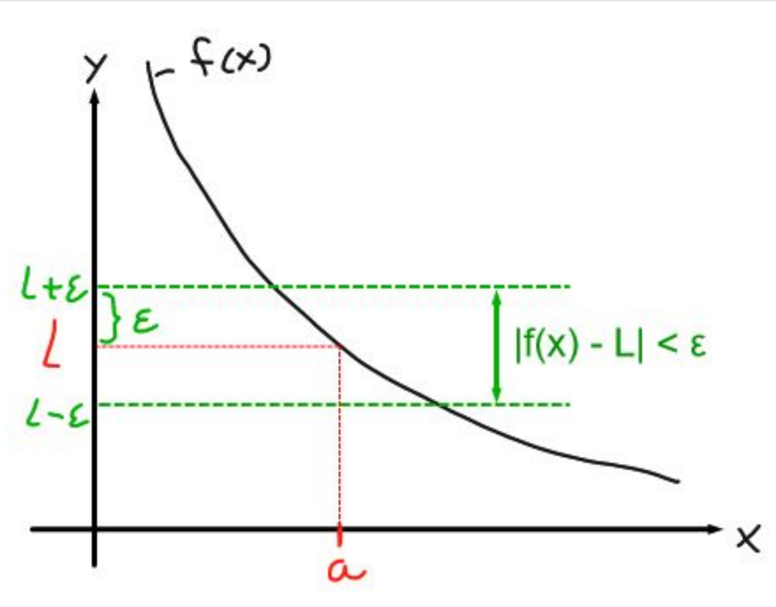
Forklaring av |f(x) - L| < ε

Uttrykket **|f(x) - L|** representerer avstanden mellom **f(x)** og **L**.

Uttrykket **|f(x) - L| <** ε representerer derfor et åpent intervall rundt **L** på y-aksen.

Alle avstander mellom **f(x)** og **L** i dette intervallet er mindre enn ε.

Siden ε **> 0**, må intervallet ha en bredde, men kan ellers være så liten som vi måtte ønske.



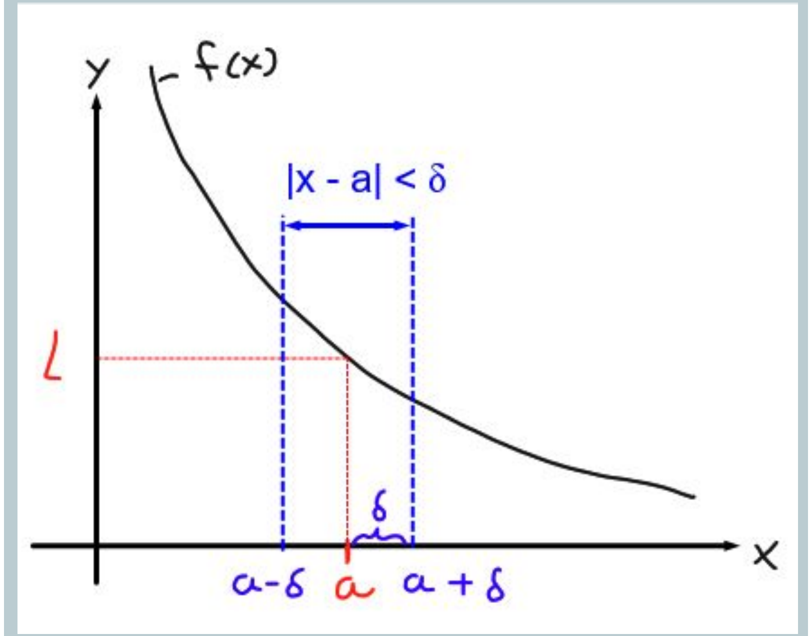
Forklaring av $|x - a| < \delta$

Uttrykket **$|x - a|$** representerer avstanden mellom **x** og **a**.

Uttrykket **$|x - a| < \delta$** representerer derfor et åpent intervall rundt **a** på x-aksen.

Alle avstander mellom **x** og **a** i dette intervallet er mindre enn **δ**.

Siden **$\delta > 0$**, må intervallet ha en bredde.

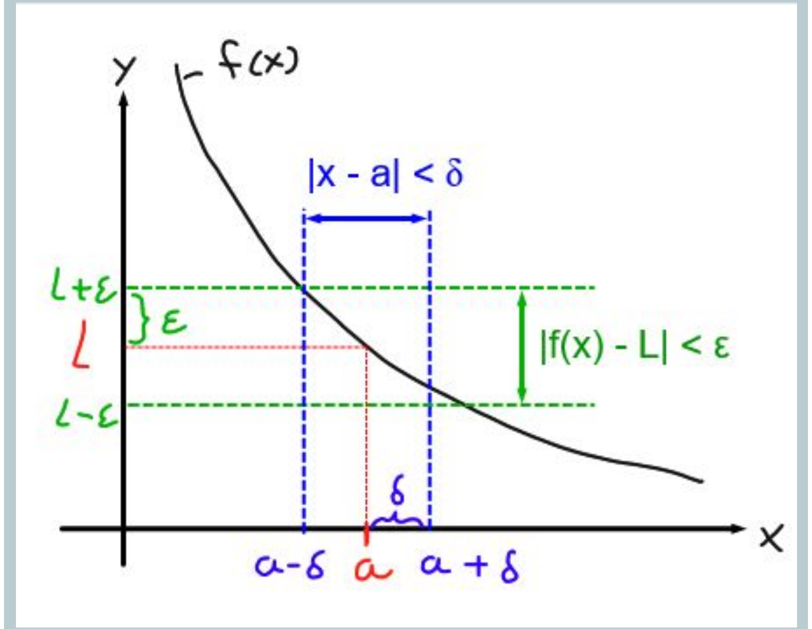


Formell matematisk definisjon

Uansett hvor liten vi måtte velger tallet ε, skal det alltid være mulig å finne et tall δ slik at dersom **$|x - a| < \delta$** vil det medføre at **$|f(x) - L| < \varepsilon$.**

Sagt på en annen måte: Når vi velger de grønne linjene, skal det alltid være mulig å finne to blå linjer slik at alle funksjonsverdier innenfor de blå linjene på x-aksen ligger innenfor de grønne linjene på y-aksen.

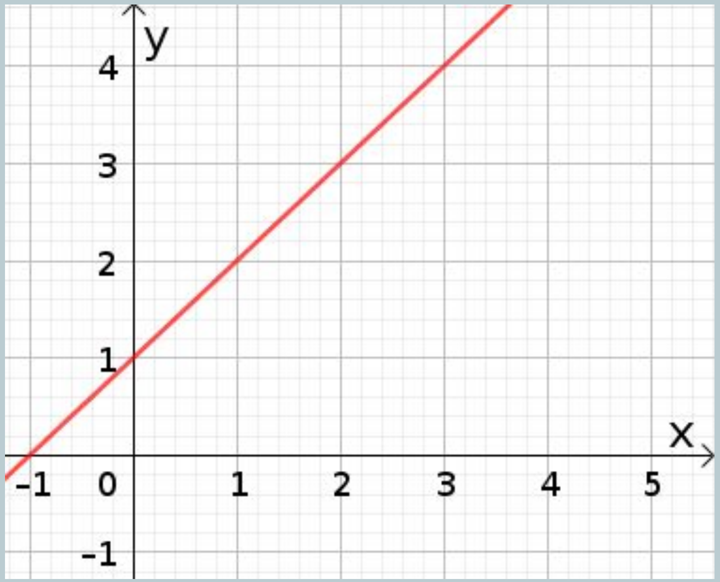
Eller: Verdiene til **f(x)** kan komme så nær **L** som vi ønsker, bare ved å gjøre **x** tilstrekkelig nær **a**.



Eksempel

Vis at $\lim_{x \to 2}(x + 1) = 3$

$f(x) = (x + 1)$



Eksempel (løsning)

Vi skal vise at

$$|x-2| < \delta \Rightarrow |(x+1)-3| < \varepsilon$$

a "medfører" f(x) L

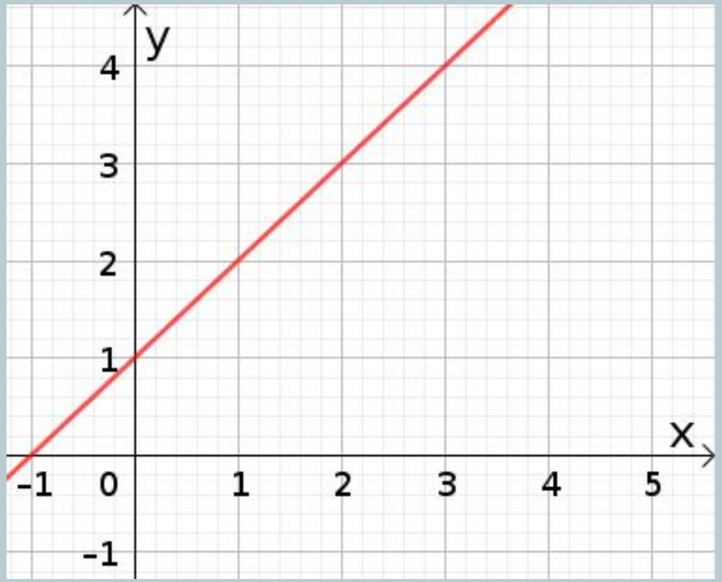
Løsning: Velger $\delta = \varepsilon$

Hvis $|x-2| < \delta$, så vil

$$|(x+1)-3| = |x+1-3| = |x-2| < \delta = \varepsilon$$

$|(x+1)-3| < \varepsilon$ Q.E.D

$f(x) = (x+1)$



Oppgave 1

Hvordan ville du forklart den formelle definisjonen på grenseverdier til en ungdomsskoleelev?

Skriv en kort tekst hvor dere forklarer definisjonen på en slik måte at den er forståelig for en elev på ungdomsskolen.

Matematiske bevis i skolematematikk

Stylianides (2007): matematiske beviser i matematikkklasserommet innebærer matematisk argumentasjon basert på tre kriterier:

- De bruker utsagn som er akseptert i klasserommet (sett med aksepterte utsagn) som sanne og tilgjengelige uten ytterligere begrunnelse;
- De benytter seg av former for resonnering og argumentasjon som er gyldige og kjente for elevene; og
- De kommuniseres med uttrykksformer (representasjonsformer) som er passende og kjente for elevene.

Diskusjon

Bevisføring i skolen kan noen ganger skille seg fra “ekte” matematisk bevis.

Det er f.eks. ikke alltid man formulerer **helt generelle** bevis.

Men: hva kan man lære fra å utvide til et generelt bevis?

Å bygge en matematisk teori

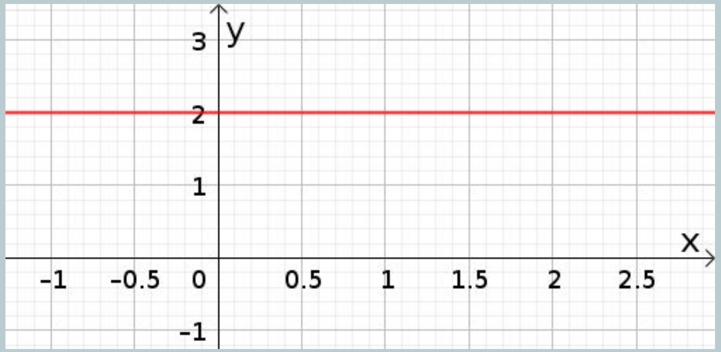
I de neste slidene skal vi bygge opp et sett med teorem som vi til slutt kan bruke til å påstå at metoden vi brukte på å løse $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2}{x - 1}$ er gyldig.

Teorem 1

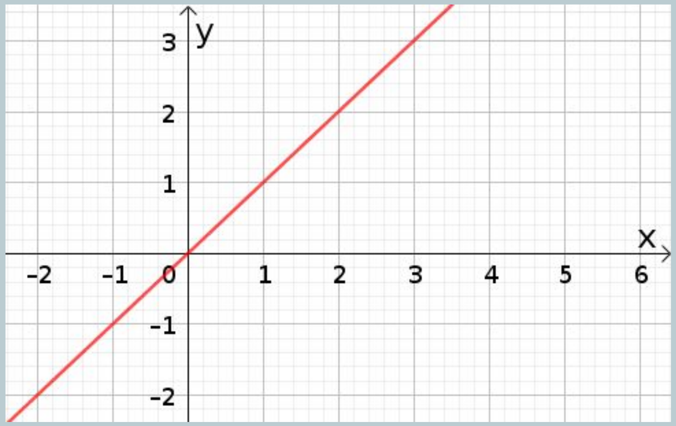
La a og c være reelle tall. Da vil

$$\lim_{x \to a} c = c \text{ og } \lim_{x \to a} x = a$$

y = 2



y = x



Bevis for teorem 1

1) $\lim\limits_{x \to a} c = c$

2) $\lim\limits_{x \to a} x = a$

$f(x) = c$

$a = a$

$L = a$

$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$|f(x) - L| = |c - c| = \boxed{0 < \varepsilon}$

2) $\lim\limits_{x \to a} x = a$ $\quad |x - a| < \delta \quad$ $\delta = \varepsilon$

$|f(x) - L| = |x - a| < \delta = \varepsilon \quad |f(x) - L| < \varepsilon$

Teorem 2

Anta at grenseverdiene $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ og $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ eksisterer. Da gjelder:

1. $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$

2. $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$

3. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ gitt at $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

Eksempel

Gitt at $\lim_{x \to 2} x = 2$ og $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$. Teorem 2 sier da at:

1. $\lim_{x \to 2}(x + x^2) = 2 + 4 = 6$

2. $\lim_{x \to 2} x^3 = 2 \cdot 4 = 8$

3. $\lim_{x \to 2} \frac{x}{x^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Bevis for teorem 2

Bevisene for teorem 2 er litt mer omfattende og bruker en del uvante triks. Vi hopper derfor over disse, men spesielt interesserte kan lese om dem i linken under:

http://www.milefoot.com/math/calculus/limits/GenericLimitLawProofs04.htm

Teorem 3

Anta at funksjonene $f(x)$ og $g(x)$ er kontinuerlige i x = a. Da er også følgende funksjoner kontinuerlige i x = a:

1. $f(x) \pm g(x)$

2. $f(x) \cdot g(x)$

3. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ gitt at $g(a) \neq 0$

Teorem 3 - bevis

Fra definisjonen: en funksjon, f(x), er kontinuerlig i x = a dersom $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$
Teoremet antar dette gjelder for f(x) og g(x).

Bevis regel 1 (addisjonsvarianten):
Vi lager en funksjon h(x) = f(x) + g(x). Vi har da h(a) = f(a) + g(a). Teorem 2 gir:

$$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a) = h(a)$$

Siden $\lim_{x \to a} h(x) = h(a)$ er h(x) kontinuerlig i x = a.

Tilbakeblikk på eksempel

Vi kan nå påstå at fremgangsmåten vi brukte for å finne $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2}{x - 1}$ er gyldig.

Vi må da vise at funksjonen er kontinuerlig.

Tilbakeblikk på eksempel (forts.)

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$$

1. f(x) = x er kontinuerlig siden f(a) = a og lim x = a **(definisjon for kontinuitet og teorem 1)**
2. x^2 = x*x er da også kontinuerlig siden x er kontinuerlig **(teorem 3, regel 2)**
3. f(x) = 2 er kontinuerlig siden f(a) = 2 og lim 2 = 2 **(definisjon av kontinuitet og teorem 1)**
4. Da er også x^2 + 2 kontinuerlig **(teorem 3, regel 1)**
5. f(x) = 1 er kontinuerlig fra samme argument som for f(x) = 2.
6. Da er også x - 1 kontinuerlig **(teorem 3, regel 2)**.
7. Siden x^2 + 2 og x-1 er kontinuerlige, er også (x^2 + 2)/(x-1) kontinuerlig unntatt for x = 1 **(teorem 3, regel 3)**
8. Vi har dermed vist at funksjonen er kontinuerlig (unntatt for x = 1), og vi kan regne ut grenseverdien $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2}{x - 1}$ med innsettingsmetoden.

Oppgaver til hjemmearbeid

1. Bevis teorem 3, regel 2 og 3

2. Bruk den formelle definisjonen av grenseverdier til å vise at $\lim_{x\to 1}(2x+5)=7$

3. Se på hvordan vi definerte en grenseverdi på slide 21. Prøv å lag en liknende "muntlig" definisjon for $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ og $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

4. Lag en epsilon-delta-definisjon fra definisjonene i pkt 3.

5. Bruk definisjonene til å vise at $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$

Svar på oppgave 3 leveres på spørreskjemaet for veiledningstimen på mandag (vi gjennomgår også refleksjonsnotatet på veiledningstimen).

Andre ressurser om grenseverdier

Kahn Academy

- Formelle definisjonen på grenseverdier
- Kontinuitet

Rootmath

- Formelle definisjonen på grenseverdier (del 1)
- Formelle definisjonen på grenseverdier (del 2)
- Eksempel på bruk av definisjonen
- Bevis for for at x^2 går mot 4 når x går mot 2 (litt mer avansert)