ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA

GRUPO # 14

INTEGRALES DE SUPERFICIE: Superficies Parametrizadas y Áreas

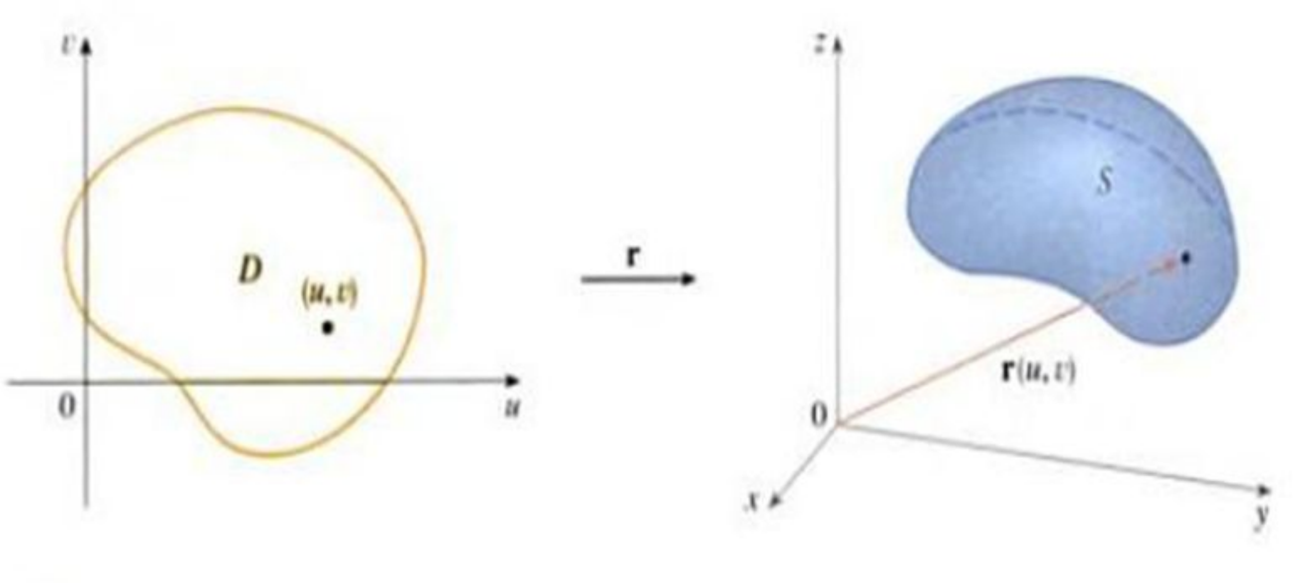
Ricardo López
Luis Picho

Superficies Parametrizadas

- De la misma forma que en el caso de las curvas, las superficies serán aquellos conjuntos que se puedan ver como la imagen de una función derivable definida sobre ciertos subconjuntos del plano.
- Si nos movemos sobre una curva solo podemos ir hacia atrás y hacia adelante siguiendo una dirección, por lo tanto es suficiente utilizar un parámetro para representar una curva.
- Para superficies podemos avanzar en dos direcciones, luego se necesitan dos parámetros para su representación. En general expresamos las coordenadas $(x; y; z)$ de un punto en una superficie S en términos de dos parámetros u y v.
- Es decir $x = F1(u; v)$, $y = F2(u; v)$, $z = F3(u; v)$

Una superficie parametrizada es la representación paramétrica o vectorial por medio de una función $\boldsymbol{\tau}$ continua en un conjunto conexo D de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, tal que $\forall(u,v) \in D$

$$\boldsymbol{\tau}(u,v) = [x(u,v), y(u,v), z(u,v)]$$, o sea $\boldsymbol{\tau}(D) = S$



Ejemplo

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$

La superficie es la gráfica del campo escalar $F(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$,

sobre la región plana $x^2 + y^2 \leq 1$

entonces $x = u$, $y = v$, $z = \sqrt{1 - u^2 - v^2}$

$\boldsymbol{\tau}(u, v) = \left[u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}\right]$

donde u, v varian dentro del círculo unitario

Para encontrar una parametrización de una superficie de revolución generada por la gráfica de una función $y = f(x)$ con $a \leq x \leq b$, cuando gira alrededor del eje x es $r(u,v) = [u, f(u)\cos v, f(u)senv]$ con $a \leq u \leq b$, $0 \leq v \leq 2\pi$

Ejemplo 6.1.3 *Hallar la ecuación parametrica de la superficie de revolución generada por la gráfica de* $y = \frac{1}{x}$ *para* $1 \leq x \leq 10$

$$r(u,v) = \left[u, \frac{1}{u}\cos v, \frac{1}{u}senv\right] \text{ con } 1 \leq u \leq 10,\ 0 \leq v \leq 2\pi$$

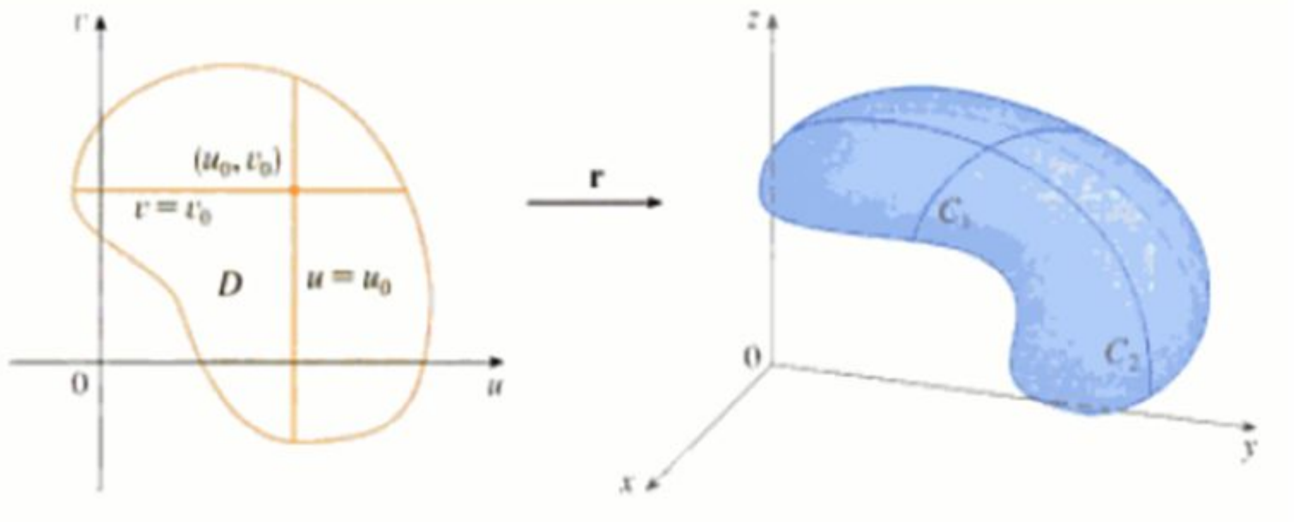
- **Propiedad** :Si S es una superficie parametrizada por medio de una función de D conjunto conexo de R2 en R3 :

- i) Si es diferenciable entonces S es una superficie diferenciable
- ii) Si es inyectiva entonces S es una superficie paramétrica simple.
- iii) Si es constante entonces S es un punto. (Superficie degenerada).
- iv) Si depende solamente de un parámetro u o v, entonces S determina una curva.(superficie degenerada).

- Así como la parametrización de una curva en general nos permite calcular vectores tangentes (y por lo tanto, rectas tangentes), una parametrización de una superficie también nos proporciona la manera del calcular vectores normales a la superficie (y por lo tanto, planos tangentes).

Sea S es una superficie paramétrizada por medio de una función $\boldsymbol{\tau}$ de un conjunto D conexo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, diferenciable en (u_0, v_0) de D. Si fijamos u en u_0 obtenemos una función ψ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $\psi(u_0, t)$ determina una curva C_1 contenida en S, cuyo vector tangente en $\boldsymbol{\tau}(u_0, v_0)$ es $T_v(u_0, v_0) = \dfrac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial v}(u_0, v_0) = \left[\dfrac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \dfrac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\right]$

De igual manera si fijamos v en v_0 obtenemos una función ϕ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $\phi(t, v_0)$ determina una curva C_2 totalmente contenida en S, cuyo vector tangente en $\boldsymbol{\tau}(u_0, v_0)$ es $T_u(u_0, v_0) = \dfrac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial u}(u_0, v_0) = \left[\dfrac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \dfrac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\right]$



Si S es una superficie paramétrizada por medio de una función $\boldsymbol{\tau}$ de un conjunto D conexo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, diferenciable en (u_0, v_0) de D, entonces el vector $\boldsymbol{n} = T_u \times T_v$ es normal a la superficie S.

Una superficie S de $\mathbb{R}^3$ paramétrizada por medio de una función $\boldsymbol{\tau}$ de un conjunto D conexo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, se dice que es suave en $\boldsymbol{\tau}(u_0, v_0)$ si $\boldsymbol{n} = T_u \times T_v \neq \mathbb{O}$ en (u_0, v_0).

Si S es suave entonces $\boldsymbol{n}$ varia en forma continua en S

Nota : Si una superficie S es suave en $\boldsymbol{\tau}(u_0, v_0)$ entonces existe el plano tangente a S en (u_0, v_0).

Si S es una superficie paramétrizada por medio de una función $\boldsymbol{\tau}$ de un conjunto D conexo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, suave en $\boldsymbol{\tau}(u_0, v_0)$ entonces $\boldsymbol{n} = T_u \times T_v$ es normal a S en $\boldsymbol{\tau}(u_0, v_0)$ y $\boldsymbol{n} \bullet (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$ determina la ecuación del plano tangente a S en (x_0, y_0, z_0).

Si S es una superficie paramétrizada por medio de una función $\boldsymbol{\tau}$ de un conjunto D conexo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, diferenciable en D, entonces x, y y z son diferenciables en D y ademas

$\dfrac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial v} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial u}$ es llamado producto vectorial fundamental.

Ejemplo 2

Ejemplo 6.1.5 *Una superficie esta parametrizada por medio de* $\tau(u,v) = [2\cos v, 3senv, u]$.

Hallar la ecuación cartesiana de S *y la ecuación del plano tangente a* S *en* $P = \left(1, \frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\right)$

La superficie es un cilindro eliptico cuya ecuación implicita es

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

luego $\dfrac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial v} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial u} = [-3Cosv, 2Senv, 0]$

Si $P = \left[1, \frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\right]$ *entonces* $u = 2$ *y* $v = \frac{\pi}{3}$

la normal del plano tangente en P *es igual a*

$$\boldsymbol{n} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial v}\left(2, \frac{\pi}{3}\right) \times \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial u}\left(2, \frac{\pi}{3}\right) = \left(-\frac{3}{2}, \sqrt{3}, 0\right)$$

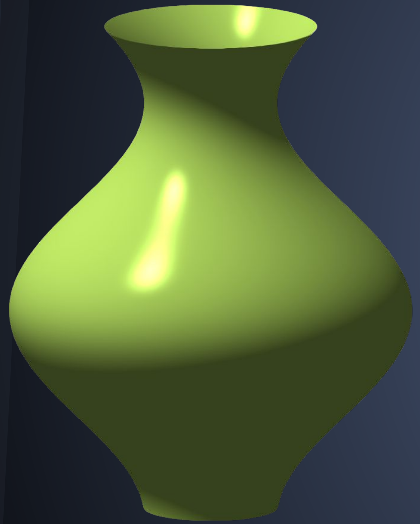
Ejemplo 6.1.6 *entonces*

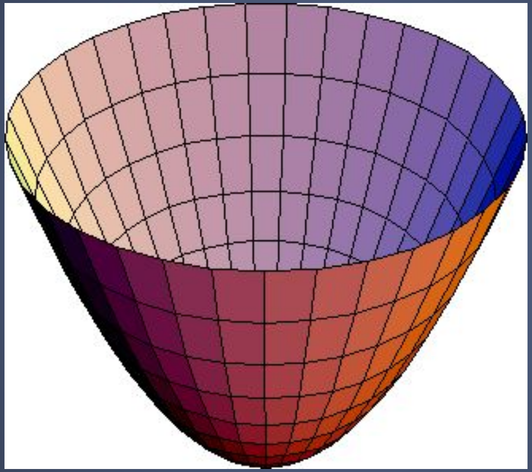
$$\left(-\frac{3}{2}, \sqrt{3}, 0\right) \bullet \left(x - 1, y - \frac{3\sqrt{2}}{2}, z - 2\right) = 0$$

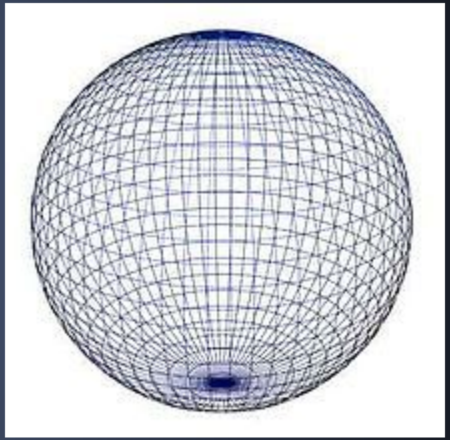
$$-3x + 2\sqrt{3}y = 3\sqrt{6} - 3$$

es la ecuación del plano tangente a S *en* P

Área de Superficies







Dada una parametrización de una superficie S: $\vec{r}(u,v) = (x,y,z) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $(u,v) \in \mathcal{D}$, consideremos los incrementos Δu y Δv en el punto $(u,v) \in \mathcal{D}$ para formar el rectángulo de la Figura 10.8, con un área igual a $\Delta u \, \Delta v$.

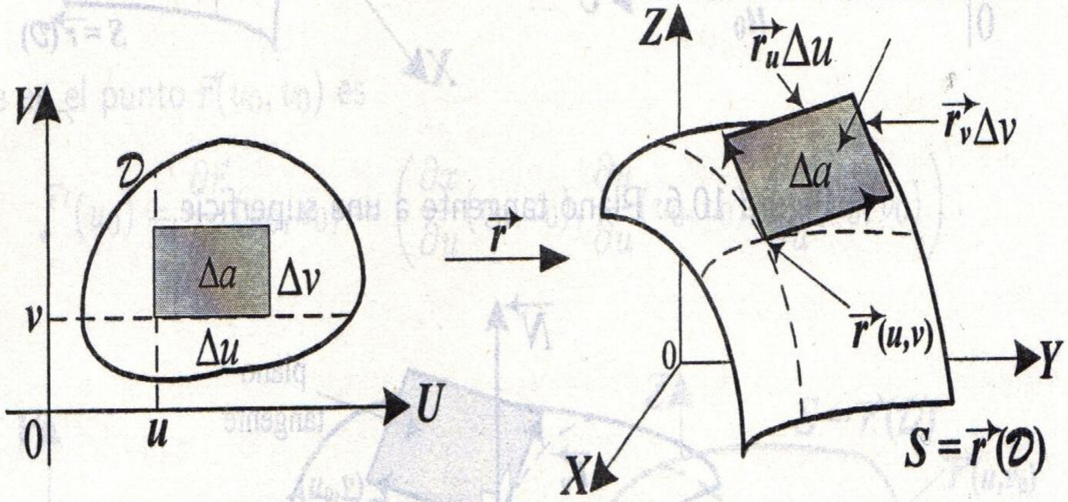


Figura 10.8: Invariancia del área de un rectángulo infinitesimal ante una transformación.

Supongamos que u y v representan el tiempo; cuando u se incrementa en Δu, un punto situado sobre S en $\vec{r}(u,v)$ se desplaza a lo largo de una $u-$curva (para v fija) en el tiempo Δu una distancia aproximadamente igual a $\left\|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right\| \Delta u$, donde $\left\|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right\|$ representa la velocidad a lo largo de esta $u-$curva. Análogamente, cuando u se mantiene fija, el punto se desplaza a lo largo de una $v-$curva en el tiempo Δv una distancia aproximadamente igual a $\left\|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right\| \Delta v$. Así, la imagen del rectángulo de área $\Delta u \, \Delta v$, es aproximadamente igual a la de un paralelogramo determinado por los vectores $\vec{r}_u \Delta u$ y $\vec{r}_v \Delta v$ y cuya área es la norma de su producto vectorial; es decir,

$$\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \Delta u \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \Delta v \right\| = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \, \Delta u \, \Delta v,$$

que se denomina elemento de área de la superficie $\mathcal{S}$ y que lo denotaremos $\Delta S = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \, \Delta u \, \Delta v$ o también $dS = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \, du \, dv$.

Como $\left\|\vec{A}\times\vec{B}\right\|^2 = \left\|\vec{A}\right\|^2\left\|\vec{B}\right\|^2 - \left\langle\vec{A}\,|\,\vec{B}\right\rangle^2$, se sigue que

$$\left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right\|^2 = \|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|^2 = \|\vec{r}_u\|^2\,\|\vec{r}_v\|^2 - \langle\vec{r}_u\,|\,\vec{r}_v\rangle^2 .$$

Si notamos por $E = \langle\vec{r}_u\,|\,\vec{r}_u\rangle = \|\vec{r}_u\|^2$, $F = \langle\vec{r}_u\,|\,\vec{r}_v\rangle$, $G = \langle\vec{r}_v\,|\,\vec{r}_v\rangle = \|\vec{r}_v\|^2$; entonces,

$$\left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right\| = \|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\| = \sqrt{EG-F^2}.$$

Por lo tanto,

$$dS = \|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|\,du\,dv = \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

El vector $d\,\vec{S} = (\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\,du\,dv$ se denomina *vector elemento de superficie*.

Definición (de área de una superficie) Dada la parametrización $\vec{r}(u,v)$ de clase $\mathcal{C}^1$ sobre una región $\mathcal{D}$ del plano UV y tal que todos los puntos de $\mathcal{D}$ son regulares ($\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$ en $\vec{r}(u,v)$), excepto para un número finito de curvas suaves, se define el área de la superficie parametrizada S como:

$$\text{Área}(S) = \iint_S dS = \iint_{\mathcal{D}} \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \, du\, dv = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

$$\mathcal{S}\colon \vec{r}(x,y) = (x, y, f(x,y)); \text{ con } (x,y) \in \mathcal{D}.$$

En cuyo caso, $\vec{r}_x = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \left(1, 0, \dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\vec{r}_y = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \left(0, 1, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$; luego, $\vec{r}_x \times \vec{r}_y = \left(-\dfrac{\partial f}{\partial x}, -\dfrac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$ y $\|\vec{r}_x \times \vec{r}_y\| = \sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$. En consecuencia,

$$\text{Área}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

BIBLIOGRAFÍA

- GALINDO EDWIN, CALCULO VECTORIAL, Prociencia Editores, Ecuador, 2009
- Calculo Vectorial.pdf

- http://diccio-mates.blogspot.com/2011/06/coordenadas-esfericas.html
- http://www.matematicaaplicada2.es/data/pdf/1329846317_288026258.pdf