

PF60/30 - Didattica della fisica moderna

1 CFU (2+3 ore)

SECONDA PARTE

Andrea Mari



Programma

- I parte
(2 ore) {
1. Introduzione teorica e storica all'esperimento di Stern-Gerlach
 2. Applicazione didattica "Spins package": simulatore esperimento di Stern-Gerlach
- OGGI
↓
- II parte
(3 ore) {
3. I postulati della meccanica quantistica
 4. Applicazione didattica online: simulatore interattivo di un computer quantistico

Programma

1. Introduzione teorica e storica all'esperimento di Stern-Gerlach
2. Applicazione didattica "Spins package": simulatore esperimento di Stern-Gerlach
-  3. I postulati della meccanica quantistica
4. Applicazione didattica online: simulatore interattivo di un computer quantistico

Strumenti matematici (definiti in modo informale e **non rigoroso**)

Spazio di Hilbert d -dimensionale:

- Spazio vettoriale formato da tutti i vettori $\vec{\psi}$ costituiti da d elementi complessi: $\vec{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_d \end{bmatrix}$, $\psi_j \in \mathbb{C}$

Nota: concetto molto simile allo spazio euclideo in d dimensioni ma con coordinate complesse.

- Il *prodotto scalare* fra due vettori $\vec{\psi}$ e $\vec{\varphi}$ è definito in questo modo:

$$\langle \vec{\psi}, \vec{\varphi} \rangle = \psi_1^* \varphi_1 + \psi_2^* \varphi_2 + \dots + \psi_d^* \varphi_d$$

complesso coniugato
 $(a + ib)^* := a - ib$

Nota: come nel caso di vettori reali nello spazio euclideo, il prodotto scalare è grande se i vettori “puntano in direzioni simili” mentre è piccolo se “puntano in direzioni diverse”.

Strumenti matematici (definiti in modo informale e **non rigoroso**)

Norma (modulo) di un vettore:

La *norma* di un vettore è data dalla radice del prodotto scalare con se stesso:

$$|\vec{\psi}| = \sqrt{\langle \vec{\psi}, \vec{\psi} \rangle} = \sqrt{|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \dots + |\psi_d|^2}$$

Vettori normalizzati:

Un vettore si dicono *normalizzato* se $|\vec{\psi}| = 1$

Vettori ortogonali:

Due vettori $\vec{\psi}$ e $\vec{\varphi}$ si dicono *ortogonali* se $\langle \psi, \varphi \rangle = 0$.

Operatore lineare nello spazio di Hilbert:

Operazione che corrisponde alla moltiplicazione di un vettore $\vec{\psi}$ per una matrice \mathbf{A} (con elementi complessi):

$$\vec{\psi} \longrightarrow \vec{\psi}' = \mathbf{A}\vec{\psi} = \sum_{k=1}^d \begin{bmatrix} A_{1,k} \\ A_{2,k} \\ \vdots \\ A_{d,k} \end{bmatrix} \psi_k$$

Strumenti matematici (definiti in modo informale e **non rigoroso**)

Operatore lineare hermitiano:

$$A^{*T} = A \quad (\text{cioè } A_{j,i}^* = A_{i,j})$$

Teorema spettrale (definizione informale):

Per ogni operatore lineare hermitiano \mathbf{A} , esistono:

- d autovettori normalizzati e ortogonali fra loro $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_d\}$ $\langle \vec{a}_i, \vec{a}_j \rangle = \delta_{i,j}$
- d autovalori reali $\{a_1, a_2, \dots, a_d\}$ $a_j \in \mathbb{R}$

Base dello spazio di Hilbert privilegiata rispetto ad \mathbf{A}



tali che:

$$A \vec{a}_j = a_j \vec{a}_j$$

Nota: gli autovettori non sono ruotati da \mathbf{A} ma solo riscalati per un fattore a_j .

Strumenti matematici (definiti in modo informale e **non rigoroso**)

Esempio $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A_{j,i}^* = A_{i,j} \Rightarrow \mathbf{A}$ è una matrice hermitiana \Rightarrow Esistono 2 autovalori reali
2 autovettori ortogonali tali che:

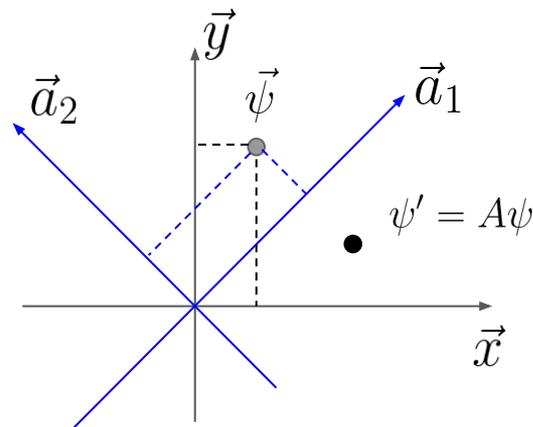
$$A \vec{a}_j = a_j \vec{a}_j$$
$$\text{Autovettori } \left\{ \vec{a}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\}$$
$$\text{Autovalori } \{a_1 = 1, a_2 = -1, \}$$

Interpretazione geometrica

- Rispetto agli assi cartesiani $\left\{ \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

\mathbf{A} agisce in modo non banale (riflessione rispetto alla bisettrice).

- Nel sistema di riferimento privilegiato degli autovettori, \mathbf{A} agisce come una semplice inversione della coordinata lungo l'asse \vec{a}_2



Postulato 1

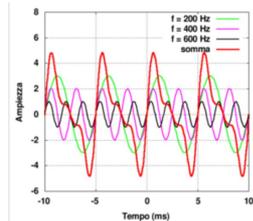
Lo stato di un sistema fisico a d livelli, è completamente caratterizzato da un vettore $\vec{\psi}$ normalizzato ($|\vec{\psi}| = 1$) nello spazio di Hilbert di dimensione d .

I versori $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, \dots , $\vec{e}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ d \end{bmatrix}$ corrispondono a stati (ortogonali) perfettamente distinguibili tra loro.
(tramite un'opportuna misura del sistema)

- Uno stato generico $\vec{\psi}$ rappresenta quindi una *sovrapposizione quantistica* di stati distinguibili.
- Gli elementi complessi del vettore $\vec{\psi}$ si dicono *ampiezze*.
- **Implicazione fisica importante (*principio di sovrapposizione*):**

Se $\vec{\psi}_A$ e $\vec{\psi}_B$ sono due stati possibili di un sistema fisico, allora lo è anche $\vec{\psi}' = \frac{\alpha\vec{\psi}_A + \beta\vec{\psi}_B}{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
 $N \in \mathbb{R}_+$, t.c. $|\vec{\psi}'| = 1$

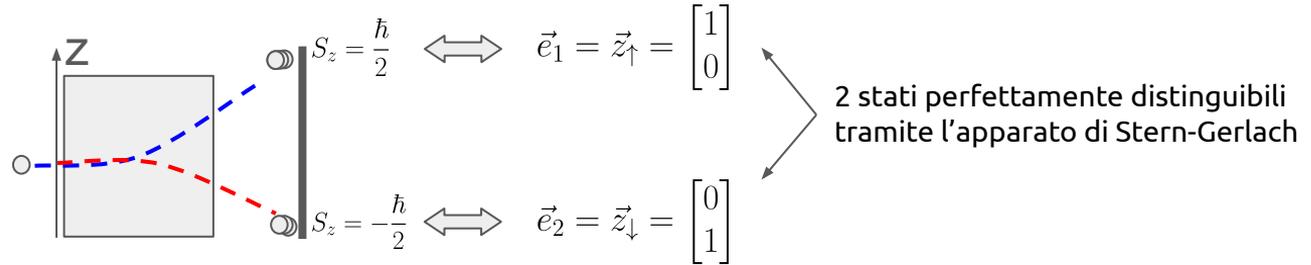
Nota: lo stesso principio vale per il concetto di "onda" in fisica classica.



Esempio:

Un atomo di argento dell'esperimento di Stern-Gerlach può avere **solo due** magnetizzazioni lungo l'asse z corrispondenti a due valori distinti dello spin:

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \text{ (SPIN UP)} \quad \text{e} \quad S_z = -\frac{\hbar}{2} \text{ (SPIN DOWN)}$$



Stato quantistico generico (postulato 1):

$$\vec{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{ampiezza spin up} \\ \text{ampiezza spin down} \end{array} \quad \begin{array}{l} \psi_\uparrow, \psi_\downarrow \in \mathbb{C} \\ |\psi_\uparrow|^2 + |\psi_\downarrow|^2 = 1 \end{array}$$

Postulato 2

A ogni quantità fisica "A" misurabile sperimentalmente (*osservabile*), corrisponde una matrice Hermitiana **A**.

$$A_{j,i}^* = A_{i,j}, \quad A_{i,j} \in \mathbb{C} \quad i, j \in \{1, 2, \dots, d\}$$

Esempio:

Si può dimostrare che, per un atomo di Stern-Gerlach, alle quantità *osservabili* S_z, S_x, S_y corrispondono le seguenti matrici:

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Osservabile =
spin lungo l'asse z

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Osservabile =
spin lungo l'asse x

$$S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

Osservabile =
spin lungo l'asse y

- Due matrici, a differenza di due scalari ("numeri"), in generale non commutano. Per esempio: $S_z S_x \neq S_x S_z$

↳ **Implicazione fisica importante: le misure quantistiche non commutano!**

Postulato 3

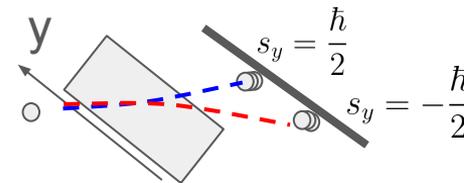
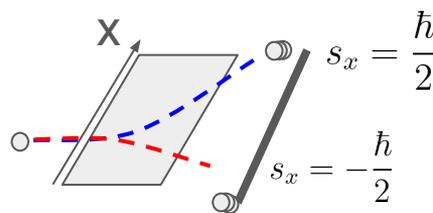
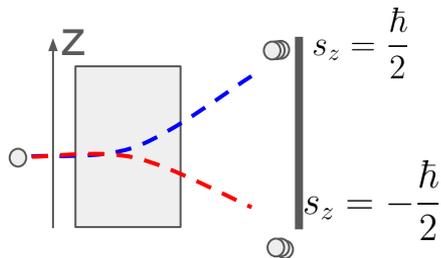
In una singola misura di una quantità osservabile \mathbf{A} , i soli risultati possibili sono gli *autovalori* $\{a_1, a_2, \dots, a_d\}$ di \mathbf{A} .

Implicazione fisica importante:

Per un sistema fisico il cui spazio di Hilbert ha dimensione finita ($d=2$ per particelle con spin $\frac{1}{2}$), **tutte le grandezze fisiche osservabili sono quantizzate** (solo d autovalori)

Quindi non solo l'energia (come previsto da Planck) o il momento angolare (come previsto da Bohr).

Corrispondono ai due picchi osservati nell'esperimento di Stern-Gerlach!



Esempio:

Si può dimostrare che gli autovalori delle matrici di spin

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

sono i seguenti:

$$\{s_{z_1}, s_{z_2}\} = \left\{ \frac{\hbar}{2}, -\frac{\hbar}{2} \right\}$$

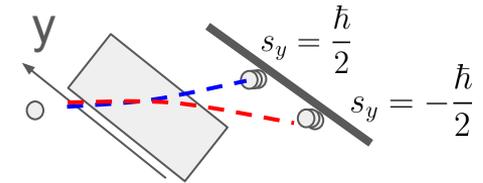
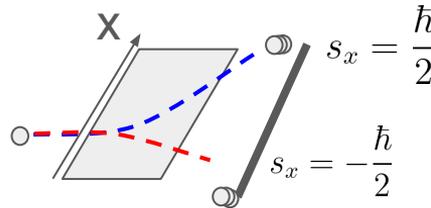
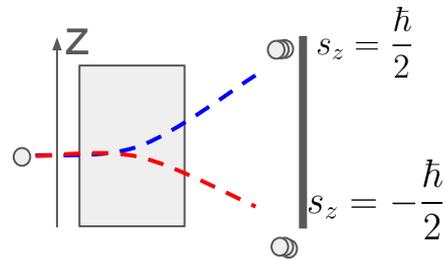
$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{s_{x_1}, s_{x_2}\} = \left\{ \frac{\hbar}{2}, -\frac{\hbar}{2} \right\}$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{s_{y_1}, s_{y_2}\} = \left\{ \frac{\hbar}{2}, -\frac{\hbar}{2} \right\}$$

Corrispondono ai due picchi osservati nell'esperimento di Stern-Gerlach!



Postulato 4

In una misura dell'osservabile \mathbf{A} , la probabilità di ottenere come risultato l'autovalore a_j è data dal modulo quadro del prodotto scalare fra l'autovettore corrispondente \vec{a}_j e lo stato del sistema $\vec{\psi}$:

$$p(a_j) = |\langle \vec{a}_j, \vec{\psi} \rangle|^2 \quad [\text{per semplicità assumiamo autovalori distinti}]$$

Esempio:

Si può dimostrare che gli **autovettori** delle matrici di spin

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

sono i seguenti:

$$\left\{ \vec{z}_+ = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{z}_- = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$p(s_z = \pm \frac{\hbar}{2}) = |\langle \vec{z}_{\pm}, \begin{bmatrix} \psi_{\uparrow} \\ \psi_{\downarrow} \end{bmatrix} \rangle|^2 = \begin{cases} |\psi_{\uparrow}|^2 \\ |\psi_{\downarrow}|^2 \end{cases}$$

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \vec{x}_+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \vec{x}_- = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\}$$

$$p(s_x = \pm \frac{\hbar}{2}) = |\langle \vec{x}_{\pm}, \begin{bmatrix} \psi_{\uparrow} \\ \psi_{\downarrow} \end{bmatrix} \rangle|^2 = \frac{|\psi_{\uparrow} \pm \psi_{\downarrow}|^2}{2}$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \vec{y}_+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \vec{y}_- = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\}$$

$$p(s_y = \pm \frac{\hbar}{2}) = |\langle \vec{y}_{\pm}, \begin{bmatrix} \psi_{\uparrow} \\ \psi_{\downarrow} \end{bmatrix} \rangle|^2 = \frac{|\psi_{\uparrow} \pm i\psi_{\downarrow}|^2}{2}$$

Postulato 5

In una misura dell'osservabile A , qualsiasi sia lo stato iniziale, lo stato finale cambia ("collassa") nell'*autovettore* \vec{a}_j associato al risultato a_j :

$$\vec{\psi} \xrightarrow{\text{misura di } A} \begin{cases} \vec{a}_1 & \text{se risultato ottenuto} = a_1 \\ \vec{a}_2 & \text{se risultato ottenuto} = a_2 \\ \vdots & \\ \vec{a}_d & \text{se risultato ottenuto} = a_d \end{cases}$$

Postulato più paradossale e filosoficamente controverso di tutta la teoria quantistica

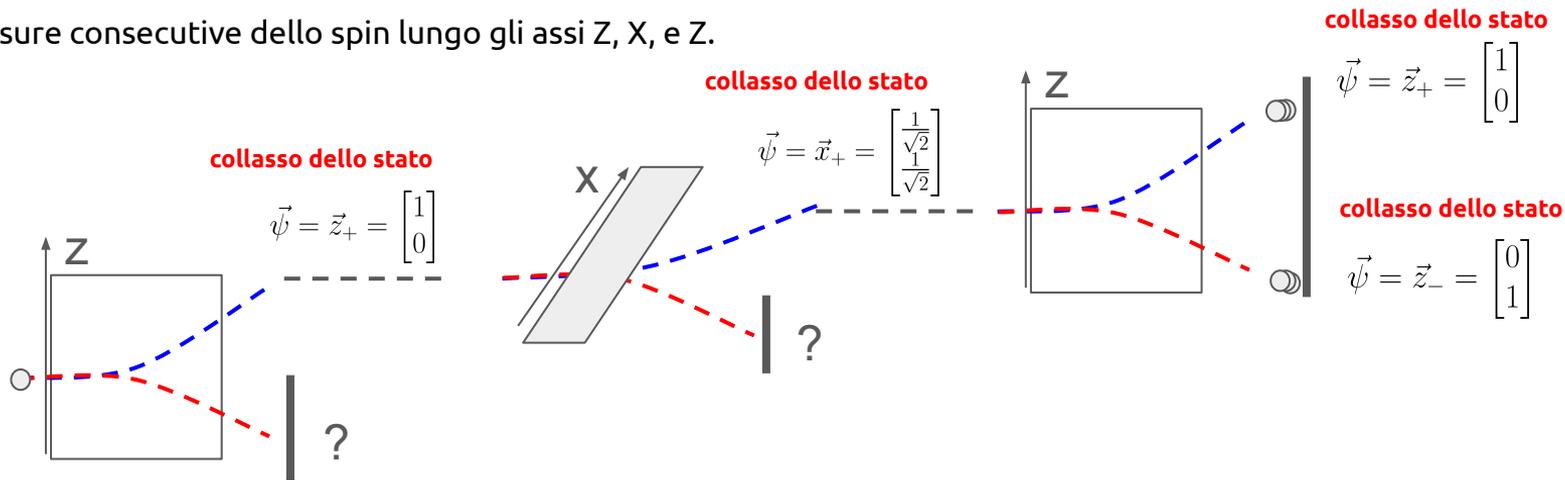
- E' impossibile osservare un sistema fisico senza perturbare il suo stato.
- Il processo di misura è irreversibile: lo stato iniziale è distrutto. L'informazione iniziale è cancellata per sempre dall'universo*! [*Potrebbe persistere in universi paralleli secondo l'interpretazione "many worlds"]
- Chi è l'*autore* di una misura quantistica? Essere umano / apparato sperimentale / detector / fotone ?

Il *problema della misura* riguarda la cosiddetta *interpretazione* (filosofica) della meccanica quantistica.

Non c'è nessun problema, invece, se la teoria è usata come una mera "ricetta matematica" utile per calcolare i risultati di esperimenti. (*Interpretazione di Copenhagen*)

Esempio: Misure consecutive dello spin lungo gli assi Z, X, e Z.

Stato di input
ignoto e random



- Probabilità di misurare $s_z = \frac{\hbar}{2}$ nella prima misura è 50% perchè lo stato di input è random. } **Incertezza statistica**
Dovuta all'ignoranza dell'osservatore
- Probabilità di misurare $s_x = \frac{\hbar}{2}$ nella seconda misura è 50% perchè lo stato iniziale è \vec{z}_+ e $|\langle \vec{z}_+, \vec{x}_+ \rangle|^2 = \frac{1}{2}$ } **Incertezza quantistica!**
- Probabilità di misurare $s_z = \frac{\hbar}{2}$ nella terza misura è 50% perchè lo stato iniziale è \vec{x}_+ e $|\langle \vec{x}_+, \vec{z}_+ \rangle|^2 = \frac{1}{2}$ } **Nonostante lo stato iniziale sia perfettamente noto all'osservatore**

Postulato 6

Sia H , l'operatore hermitiano associato all'*energia* del sistema fisico. L'evoluzione temporale dello stato quantistico soddisfa la seguente equazione differenziale, nota come *equazione di Schrödinger*:

$$i\hbar \frac{d\vec{\psi}(t)}{dt} = H\vec{\psi}$$

- L'equazione di *Schrödinger* preserva la **normalizzazione** dello stato, cioè $\langle \psi(t), \psi(t) \rangle = \langle \psi(0), \psi(0) \rangle = 1$
- Qualsiasi operazione fisica (per un sistema isolato) è descritta da una **matrice unitaria** U (cioè tale che $U^\dagger U = I$)
$$\vec{\psi}' = U\vec{\psi}$$
- L'equazione di *Schrödinger* è lineare e reversibile. Può essere utilizzata per descrivere l'evoluzione di un sistema isolato (mentre non è osservato).
- L'evoluzione temporale indotta da un processo di misura (cioè il collasso dello stato) è l'unico processo fisico che non obbedisce all'equazione di *Schrödinger* ma si comporta come descritto dal postulato 5.

Esempio:

Si può dimostrare che l'energia di un sistema magnetico soggetto a un campo magnetico **B uniforme** e diretto lungo l'asse z è:

$$H = -\mu_z B \quad (\text{Effetto bussola: energia è minima quando il momento magnetico è allineato al campo})$$

$$H = \lambda B S_z \quad \mu_z = -g_e \frac{e}{2M} S_z \quad (\text{Lezione precedente: legame fra momento magnetico e spin})$$

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$i\hbar \frac{d\vec{\psi}(t)}{dt} = H \vec{\psi} \implies i\hbar \begin{bmatrix} \frac{d\psi_{\uparrow}(t)}{dt} \\ \frac{d\psi_{\downarrow}(t)}{dt} \end{bmatrix} = \frac{\lambda B \hbar}{2} \begin{bmatrix} \psi_{\uparrow}(t) \\ -\psi_{\downarrow}(t) \end{bmatrix} \implies \vec{\psi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\lambda B t}{2}} \psi_{\uparrow}(0) \\ e^{+i\frac{\lambda B t}{2}} \psi_{\downarrow}(0) \end{bmatrix}$$

- Se misuro S_z le probabilità non cambiano.

$$p(s_z = \pm \frac{\hbar}{2}) = |\langle \vec{z}_{\pm}, \begin{bmatrix} \psi_{\uparrow} \\ \psi_{\downarrow} \end{bmatrix} \rangle|^2 = \begin{cases} |\psi_{\uparrow}|^2 \\ |\psi_{\downarrow}|^2 \end{cases}$$

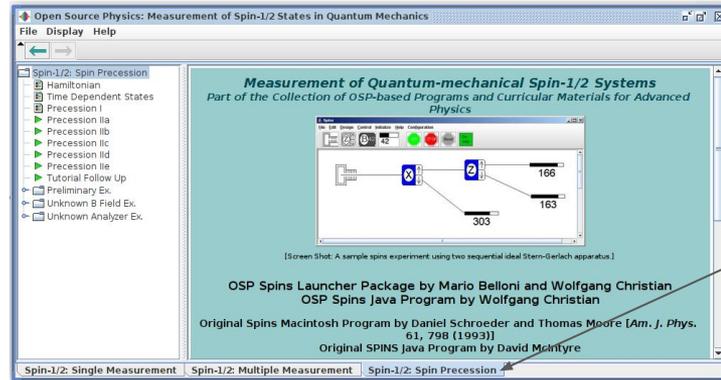
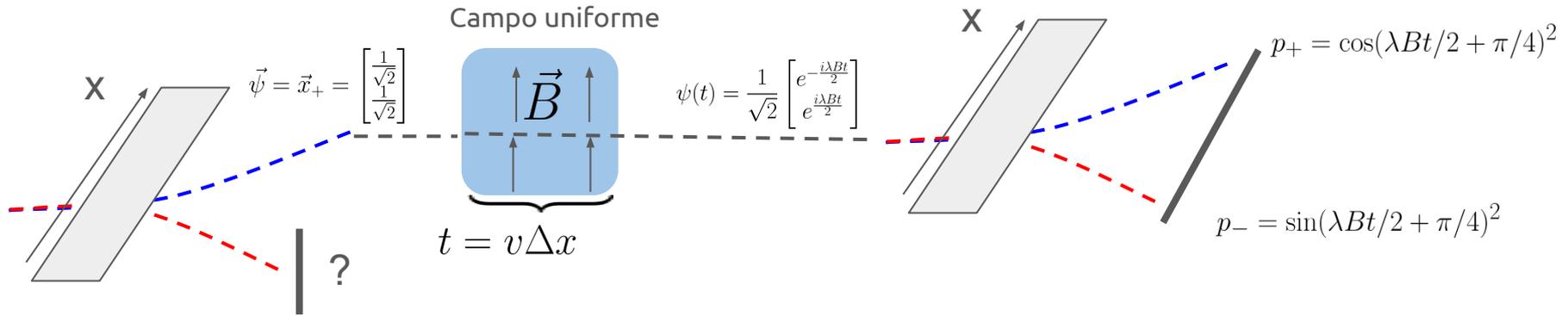
- Se misuro S_x le probabilità oscillano alla *frequenza di Larmor*.

$$p(s_x = \pm \frac{\hbar}{2}) = |\langle \vec{x}_{\pm}, \begin{bmatrix} \psi_{\uparrow} \\ \psi_{\downarrow} \end{bmatrix} \rangle|^2 = \frac{|\psi_{\uparrow} \pm \psi_{\downarrow}|^2}{2} = \frac{1 \pm \cos(\lambda B t + \varphi)}{2}$$

Nota: queste oscillazioni sono alla base del funzionamento della **risonanza magnetica nucleare** (in quel caso lo spin non è degli elettroni ma dei nuclei)

Verifica dell'equazione di Schrödinger tramite l'apparato di Stern-Gerlach:

Le oscillazioni di Larmor di uno spin $\frac{1}{2}$ soggetto a un campo magnetico sono misurabili con il seguente esperimento.

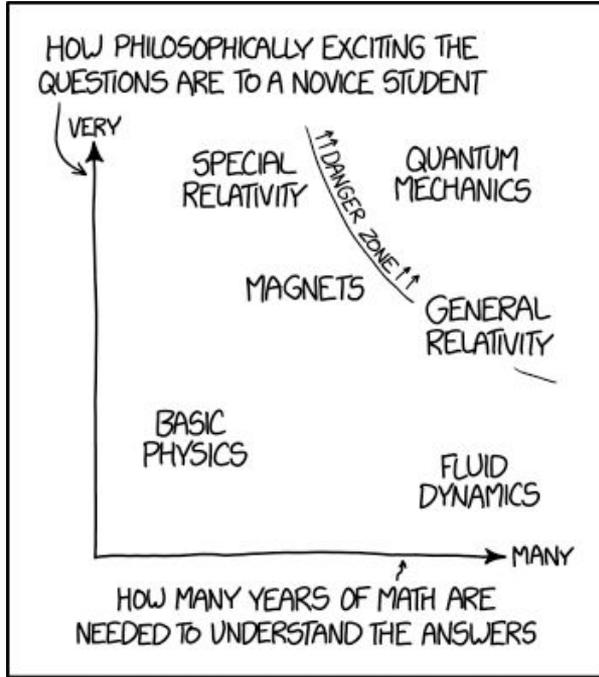


Esperimento disponibile anche nell'applicazione "Spin Package".
Cliccare su "Spin Precession".

- Da un punto di vista matematico, la teoria quantistica è molto semplice ed elegante.
- A parte la difficoltà di lavorare con numeri complessi, i concetti matematici necessari (vettore, prodotto scalare) sono semplici e già noti agli studenti di un Liceo Scientifico.
- Tutti i fenomeni "strani" e contro-intuitivi tipici della fisica quantistica sono *spiegati* con successo dalla teoria.

MA...

- Nonostante la teoria matematica sia chiara e semplice la sua **interpretazione fisica** continua a sfidare il senso comune. La nostro "senso comune" abituato alla fisica classica e si trova in difficoltà con:
 - Sistemi in sovrapposizione quantistica
 - Proprietà fisiche non definite prima della misura
 - Principio di indeterminazione
 - Problema della misura
 - Interferenza di una singola particella "con se stessa"
 - Entanglement

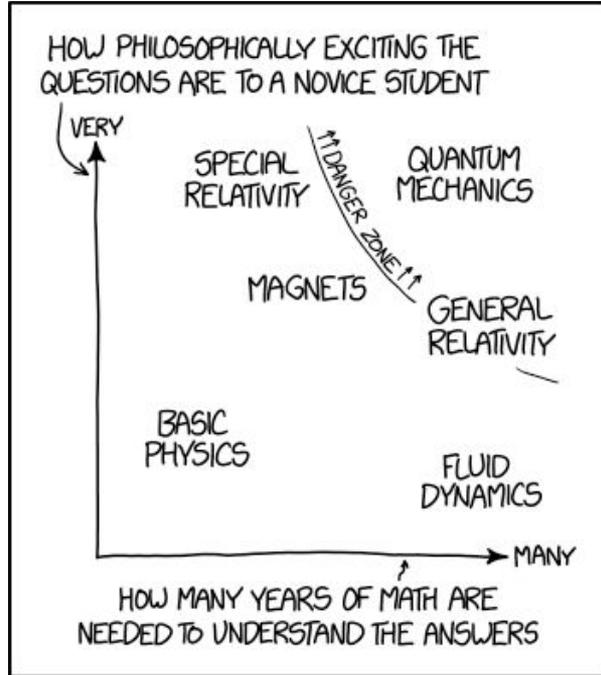


WHY SO MANY PEOPLE HAVE WEIRD IDEAS ABOUT QUANTUM MECHANICS

Source:



Concezione comune

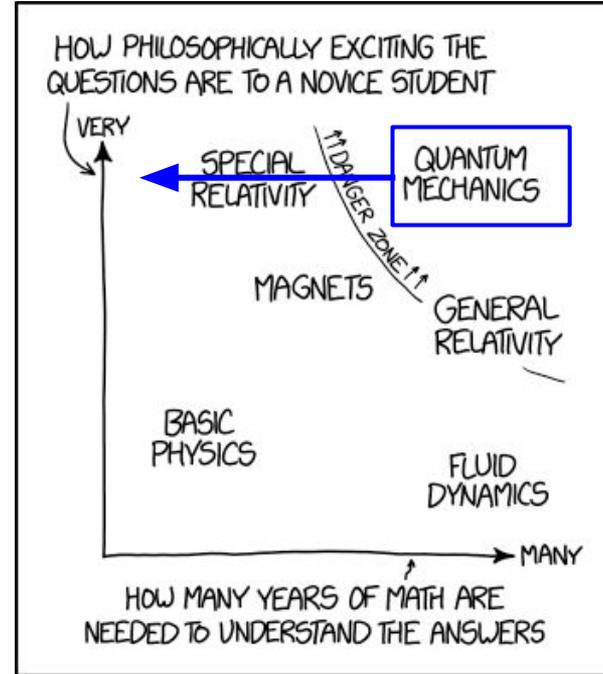


WHY SO MANY PEOPLE HAVE WEIRD IDEAS ABOUT QUANTUM MECHANICS

Source:



Realtà



WHY SO MANY PEOPLE HAVE WEIRD IDEAS ABOUT QUANTUM MECHANICS

Programma

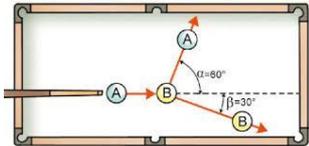
1. Introduzione teorica e storica all'esperimento di Stern-Gerlach
2. Applicazione didattica "Spins package": simulatore esperimento di Stern-Gerlach
3. I postulati della meccanica quantistica
-  4. Applicazione didattica online: simulatore interattivo di un computer quantistico

Che cos'è la fisica?

Fare operazioni matematiche tramite un **modello astratto...**

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}$$

per dedurre il comportamento di un **sistema fisico**

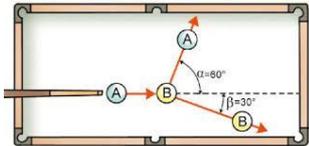


Che cos'è la fisica?

Fare operazioni matematiche tramite un **modello astratto...**

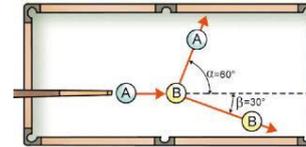
$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}$$

per dedurre il comportamento di un **sistema fisico**



Che cos'è un computer?

Osservare il comportamento di un **sistema fisico...**



per fare operazioni matematiche definite su un **modello astratto**

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}$$

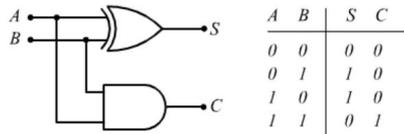
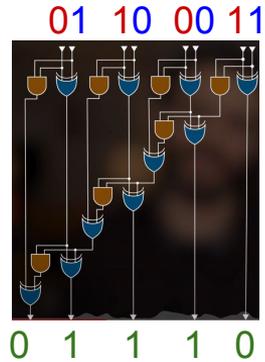
Esempio: calcolare 5+8

$$\begin{array}{r} 0101 \\ (5) \end{array} + \begin{array}{r} 1001 \\ (8) \end{array} = \begin{array}{r} 1110 \\ (13) \end{array}$$

Esempio: calcolare 5+8

$$\begin{array}{r} 0101 + 1001 = 1110 \\ (5) \quad (8) \quad (13) \end{array}$$

Modello astratto

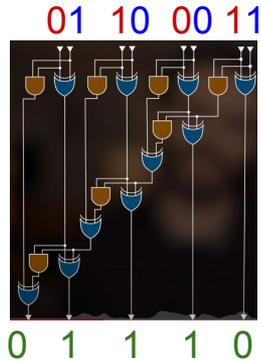


A	B	S	C
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Esempio: calcolare 5+8

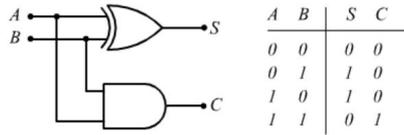
$$\begin{array}{r} 0101 + 1001 = 1110 \\ (5) \quad (8) \quad (13) \end{array}$$

Modello astratto



Dispositivo fisico A: chip elettronico

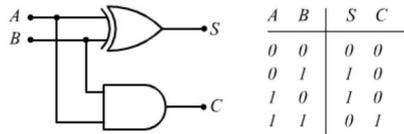
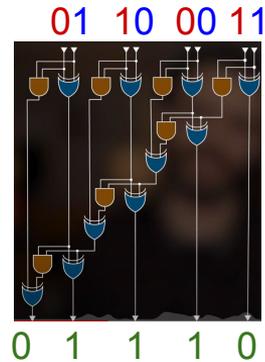
CD4008 Binary adder



Esempio: calcolare 5+8

$$\begin{array}{r} 0101 + 1001 = 1110 \\ (5) \quad (8) \quad (13) \end{array}$$

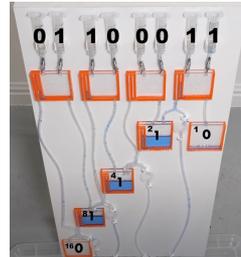
Modello astratto



Dispositivo fisico A: chip elettronico



Dispositivo fisico B: circuito idraulico

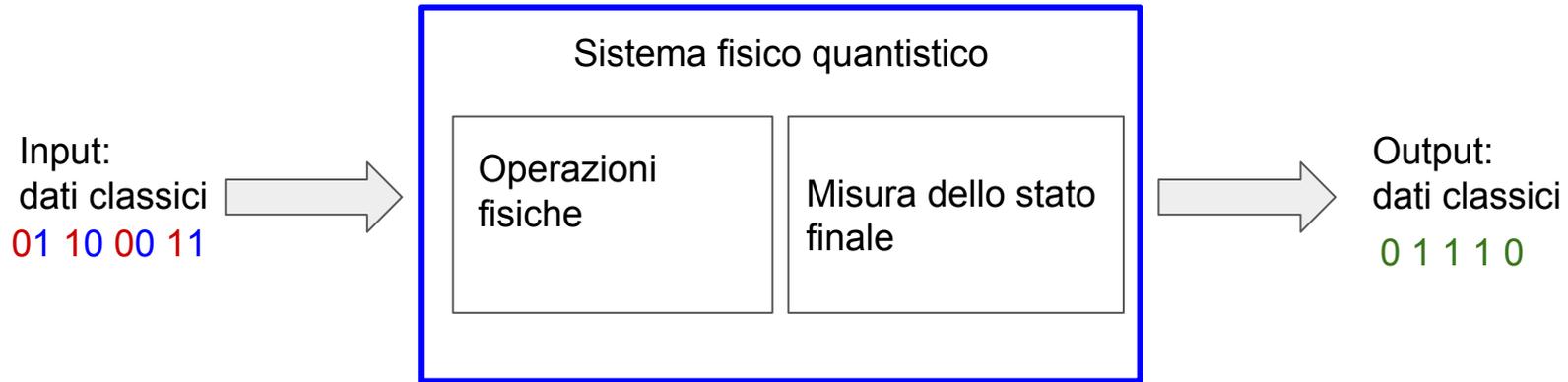


Steve Mould, *I Made A Water Computer And It Actually Works*, Youtube 2021

<https://youtu.be/lxXaizqlscw?t=666>

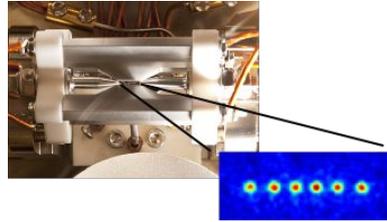
Che cos'è un computer quantistico?

*Un computer quantistico è **sistema fisico** che esegue calcoli sfruttando **intenzionalmente** le leggi della **meccanica quantistica**.*

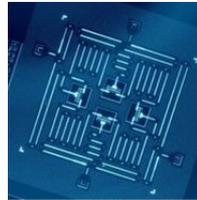


Prototipi di computer quantistici esistono oggi

- Atomi



- Circuiti superconduttori



- Fotoni



Notazione “alla Dirac”

In meccanica quantistica (e in computazione quantistica) è molto comune indicare un vettore nello spazio di Hilbert usando la notazione *alla Dirac*:

Vettore nello spazio di Hilbert: $\vec{\psi} \longrightarrow |\psi\rangle$

Versore nello spazio di Hilbert: $\vec{e}_j \longrightarrow |j\rangle$

Decomposizione del vettore nella base naturale dello spazio di Hilbert:

$$\vec{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_d \end{bmatrix} = \psi_1 \vec{e}_1 + \psi_2 \vec{e}_2 + \dots + \psi_d \vec{e}_d = \psi_1 |1\rangle + \psi_2 |2\rangle + \dots + \psi_d |d\rangle$$

Prodotto scalare fra due vettori: $\langle \vec{\psi}_A, \vec{\psi}_B \rangle \longrightarrow \langle \psi_A | \psi_B \rangle$

Il modello computazionale di un computer quantistico

Bit classico

Bit: $b = 0$ oppure 1

Operazioni (a singolo bit):

$b \rightarrow b'$

Lettura del risultato
è deterministica

Lo stato di un bit non cambia
se viene letto

Il modello computazionale di un computer quantistico

Bit classico

Bit: $b = 0$ oppure 1

Operazioni (a singolo bit):
 $b \rightarrow b'$

Lettura del risultato
è deterministica

Lo stato di un bit non cambia
se viene letto

Qubit: il bit quantistico

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

Qubit: $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$

Operazioni (a singolo qubit):
 $|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle$ tale che $|\psi'\rangle$ è normalizzato

La lettura è binaria e non-deterministica:

0 con probabilità $|\alpha|^2$

1 con probabilità $|\beta|^2$

Lo stato di un qubit collassa in $|0\rangle$
oppure in $|1\rangle$, se viene letto.

Principi fisici

[Principio di
sovrapposizione]

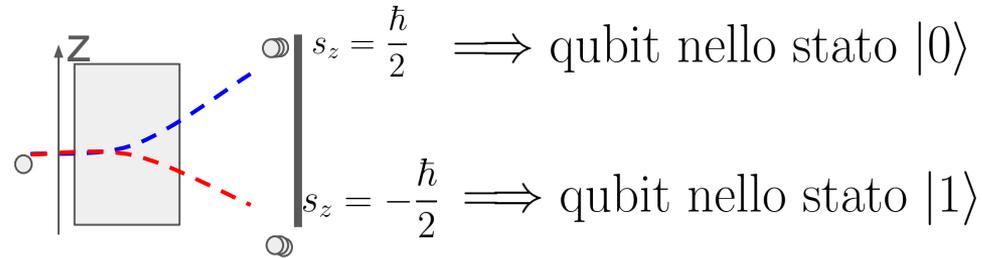
[Eq. di Schrödinger]

[Regola di Born]

[Collasso della
funzione d'onda]

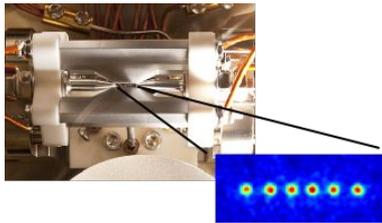
Esempi di qubit

Lo spin di un singolo atomo di argento dell'esperimento di Stern-Gerlach è un qubit!



Ogni sistema fisico che può essere preparato in due stati distinti (ortogonali) **e in una loro sovrapposizione** è un qubit

Per esempio:



**atomo con elettrone
nel livello A** \implies qubit nello stato $|0\rangle$

**atomo con elettrone
nel livello B** \implies qubit nello stato $|1\rangle$

Confronto fra un qubit e un bit probabilistico.

Bit probabilistico

$$p_0 + p_1 = 1$$

Vettore probabilità: $\mathbf{p} = [p_0, p_1]$

← probabilità
associate a
 $b=0$ e $b=1$.

Operazioni (a singolo bit):

$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}'$ tale che \mathbf{p}' è normalizzato

La lettura è binaria e non-deterministica:

0 con probabilità p_0

1 con probabilità p_1

Lo stato \mathbf{p} di un bit collassa in $\mathbf{p}_0 = [1, 0]$
oppure in $\mathbf{p}_1 = [0, 1]$, se viene letto.

Qubit: il bit quantistico

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

Qubit: $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$

Operazioni (a singolo qubit):

$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle$ tale che $|\psi'\rangle$ è normalizzato

La lettura è binaria e non-deterministica:

0 con probabilità $|\alpha|^2$

1 con probabilità $|\beta|^2$

Lo stato di un qubit collassa in $|0\rangle$
oppure in $|1\rangle$, se viene letto.

Modello matematico di un computer classico probabilistico con n bit

Stato computazionale = vettore di 2^n **probabilità**

$$\vec{p} = [p_{00\dots 0}, p_{00\dots 1}, \dots, p_{11\dots 1}]^T$$

$$\|\vec{p}\|_1 = \sum_z p_z = 1$$

Evoluzione

$$\vec{p}' = T\vec{p}$$

T è una matrice stocastica: elementi positivi e preserva $\|\cdot\|_1$

La lettura dello stato finale produce è una stringa di bit \mathbf{z} estratta da: $P(z) = p'_z$

Modello matematico di un computer quantistico con n qubit

Stato computazionale = vettore di 2^n numeri complessi $\psi_z \in \mathbb{C}$

$$\vec{\psi} = [\psi_{00\dots 0}, \psi_{00\dots 1}, \dots, \psi_{11\dots 1}]^T$$

$$\|\vec{\psi}\|_2 = \sum_z |\psi_z|^2 = 1$$

Evoluzione

$$\vec{\psi}' = U\vec{\psi}$$

U è una matrice unitaria. U ha elementi complessi e preserva $\|\cdot\|_2$

La lettura dello stato finale produce è una stringa di bit \mathbf{z} estratta da:

$$P(z) = |\psi'_z|^2$$

Perché il modello quantistico è “più potente” di quello classico?

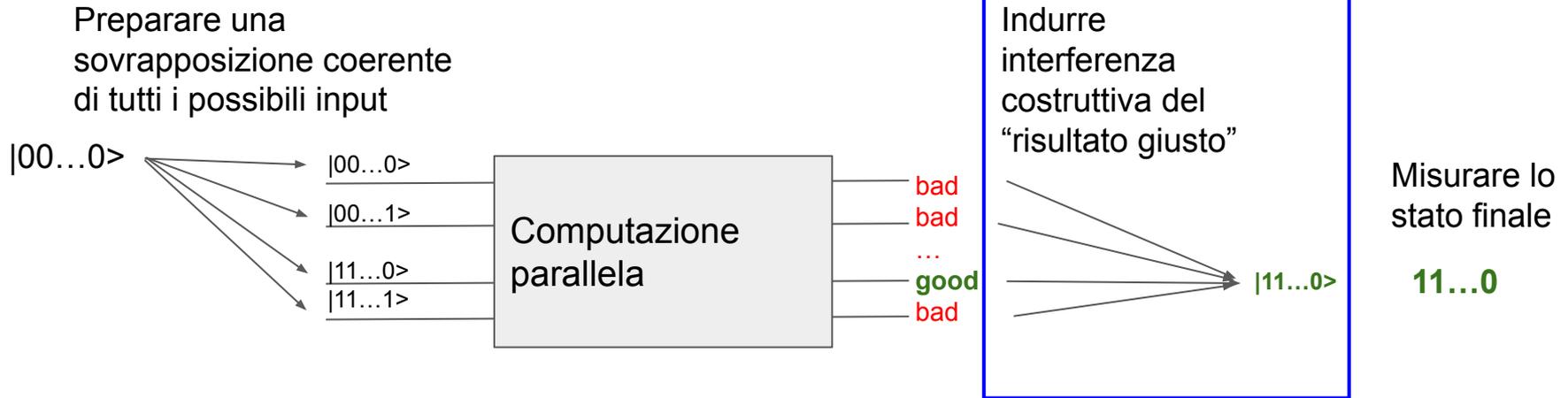
Perché le ampiezze **interferiscono fra loro**, le probabilità no.

Perché il modello quantistico è “più potente” di quello classico?

Perché le ampiezze **interferiscono fra loro**, le probabilità no.

Questo passo è impossibile con un computer classico

Schema di molti algoritmi quantistici



Una premessa importante

I computer quantistici possono risolvere velocemente **solo alcuni problemi specifici**

quindi...

I computer classici non saranno mai rimpiazzati da computer quantistici!

Attenzione alle notizie sensazionalistiche!



(2014)

FORBES > INNOVATION

Will Quantum Technology Be The Silver Bullet For Climate Change?

 **Markus Pflitsch** Forbes Councils Member
Forbes Technology Council
COUNCIL POST | Membership (Fee-Based)

Sep 2, 2022, 01:19pm EDT

French Advances / My Doctor Fired Me / Love App-tually

TIME

IT PROMISES TO SOLVE SOME OF HUMANITY'S MOST COMPLEX PROBLEMS. IT'S BACKED BY JEFF BEZOS, NASA AND THE CIA. EACH ONE COSTS \$10,000,000 AND OPERATES AT 459° BELOW ZERO. AND NOBODY KNOWS HOW IT ACTUALLY WORKS

THE INFINITY MACHINE

BY LEV GROSSMAN



TIME MAGAZINE

(2023)

FEB. 13 / FEB. 20, 2023

TIME

THE QUANTUM LEAP

THIS MACHINE CAN SOLVE PROBLEMS IN SECONDS THAT USED TO TAKE YEARS

THE FUTURE OF COMPUTING IS HERE

BY CHARLIE CAMPBELL

INTEL CEO PAT GELSINGER ON THE RISKS OF AI



TIME MAGAZINE



Esempio: l'algoritmo di Shor

Il problema della fattorizzazione di un intero

Dato un numero naturale $N = p q$ che è il prodotto di due fattori primi (p e q), trovare p and q .

Complessità computazionale

Il migliore algoritmo classico conosciuto richiede $\text{poly}(N)$ operazioni.

L'algoritmo quantistico di Shor richiede $\log(N)$ operazioni!

**Vantaggio quantistico
esponenziale!**

Esempio:

$N =$ sequenza di 2048 bit

10^{14} anni \rightarrow 10 secondi*



*<https://www.quintessencelabs.com/blog/breaking-rsa-encryption-update-state-art>

Programma

- Semplice introduzione alla meccanica quantistica tramite l'approccio computazionale:
THE BASICS OF QUANTUM MECHANICS, Nicolai Lang, 2023.
<https://thequantumlaend.de/basic-tutorial/>
- Simulatore online interattivo di circuiti quantistici:
QUANTUM CIRCUIT SIMULATOR, The Quantum Länd, University of Stuttgart, Germany.
<https://thequantumlaend.de/quantum-circuit-designer/>

Computazione quantistica con un **singolo qubit**

Stato di generico del qubit:
(primo postulato)

$$\vec{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_{\uparrow} \\ \psi_{\downarrow} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \psi_{\uparrow}, \psi_{\downarrow} \in \mathbb{C} \\ |\psi_{\uparrow}|^2 + |\psi_{\downarrow}|^2 = 1 \end{array}$$

Stato iniziale

sempre lo stesso:

$$|0\rangle = \vec{\psi}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esempio: atomo nello stato "SPIN UP" lungo asse Z,
oppure elettrone nello stato "ECCITATO".

- Applicazione di un certo numero t di operazioni elementari (gates/porte logiche)

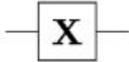
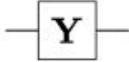
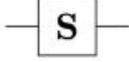
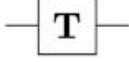
$$|\psi_t\rangle = \underbrace{XYSZHSX}_{t \text{ gates}} |0\rangle = \vec{\psi}_t = XYSZHSX \vec{\psi}_0 = \begin{bmatrix} \psi_{t\uparrow} \\ \psi_{t\downarrow} \end{bmatrix}$$

I gates sono operazioni elementari
che il computer può applicare e
corrispondono a **matrici 2X2 unitarie**

[che preservano la normalizzazione]

Lo stato finale si ottiene
moltiplicando il vettore iniziale per
le matrici 2X2 corrispondenti ad ogni
gate.

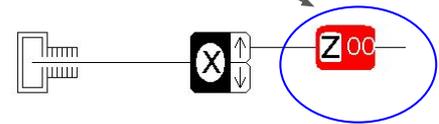
Esempi di porte logiche per un singolo qubit

Operator	Gate(s)	Matrix
Pauli-X (X)		$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Pauli-Y (Y)		$\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$
Pauli-Z (Z)		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Hadamard (H)		$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
Phase (S, P)		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$
$\pi/8$ (T)		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix}$

Matrici unitarie 2X2

Corrispondono a diverse evoluzioni temporali descritte dall'**equazione di Schrödinger**

Esempio: per uno spin corrispondono a diversi impulsi magnetici



Computazione quantistica con un **singolo qubit**

Stato di generico del qubit:
(primo postulato)

$$\vec{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_{\uparrow} \\ \psi_{\downarrow} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \psi_{\uparrow}, \psi_{\downarrow} \in \mathbb{C} \\ |\psi_{\uparrow}|^2 + |\psi_{\downarrow}|^2 = 1 \end{array}$$

Stato iniziale
sempre lo stesso:

$$|0\rangle = \vec{\psi}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

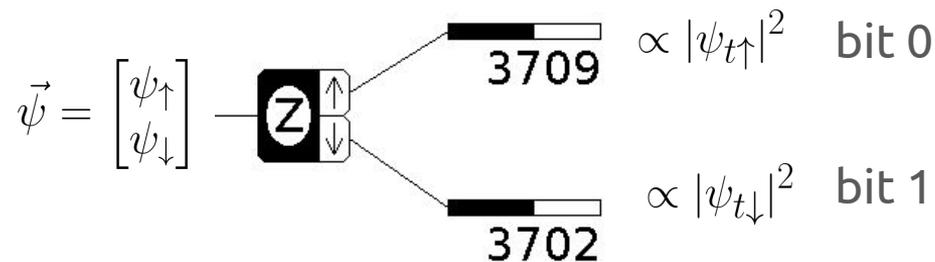
Esempio: atomo nello stato "SPIN UP" lungo asse Z,
oppure elettrone nello stato "ECCITATO".

- Applicazione di un certo numero t di operazioni elementari (gates/porte logiche)

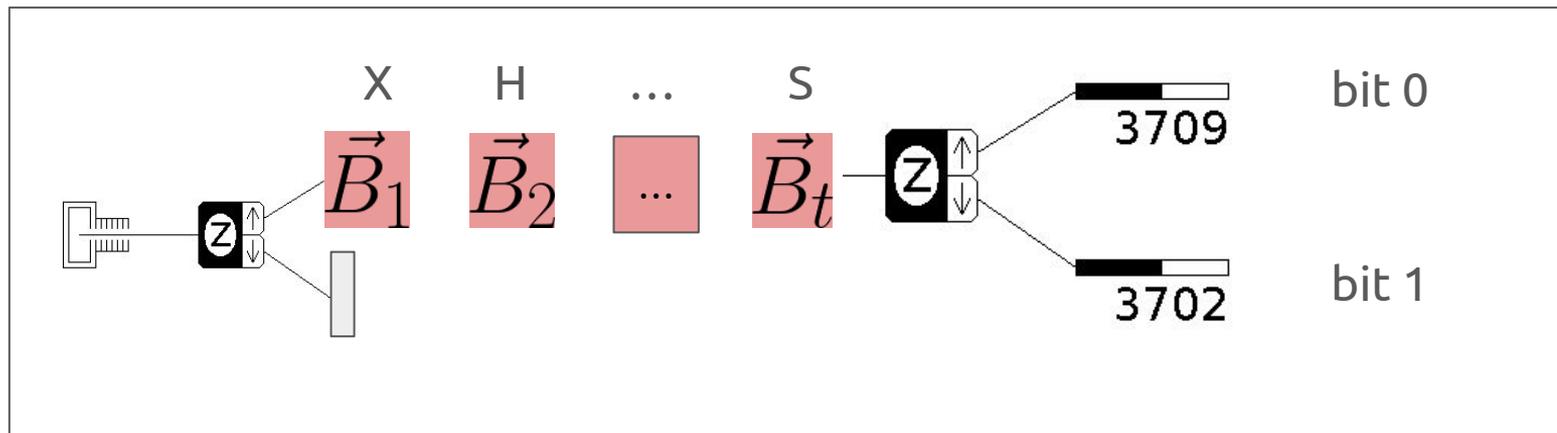
$$|\psi_t\rangle = \underbrace{XYSZHSX}_{t \text{ gates}} |0\rangle = \vec{\psi}_t = XYSZHSX \vec{\psi}_0 = \begin{bmatrix} \psi_{t\uparrow} \\ \psi_{t\downarrow} \end{bmatrix}$$

- Misura del qubit nella base "Z". Risultato: bit classico = $\begin{cases} 0 & \text{con probabilità } |\psi_{t\uparrow}|^2 \\ 1 & \text{con probabilità } |\psi_{t\downarrow}|^2 \end{cases}$

Esempio fisico di misura nella base Z



Esempio fisico di computazione completa (per un singolo qubit)



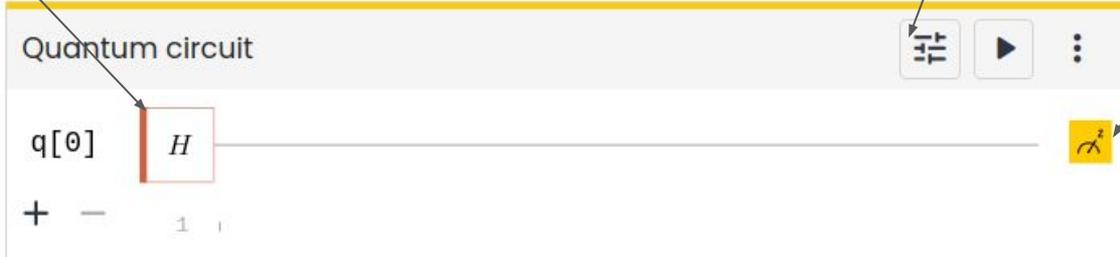
Problema numero 1

- Generare numeri intrinsecamente random con un computer quantistico

Gate Hadamard ruota $|z+\rangle$ in $|x+\rangle$ (cioè $|0\rangle$ in $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$)

Con settaggio del numero di misure uguale a 1 (shots=1)

Soluzione:



Misura nella base z (cioè osservabile i cui autovettori sono $\{|0\rangle, |1\rangle\}$)

The image shows a quantum circuit diagram. At the top, it says 'Quantum circuit'. Below that, there is a qubit labeled 'q[0]'. A Hadamard gate, represented by a box with the letter 'H', is applied to q[0]. To the right of the qubit line, there is a measurement symbol (a meter with a lightning bolt). Below the qubit line, there are control elements: a plus sign, a minus sign, and a '1' with a vertical line through it. Three arrows point from external text to specific parts of the circuit: one to the Hadamard gate, one to the measurement symbol, and one to the 'shots=1' setting in the top right corner of the simulator interface.

Risultato delle misure: “0” oppure “1” entrambi con probabilità 50%

Problema numero 2

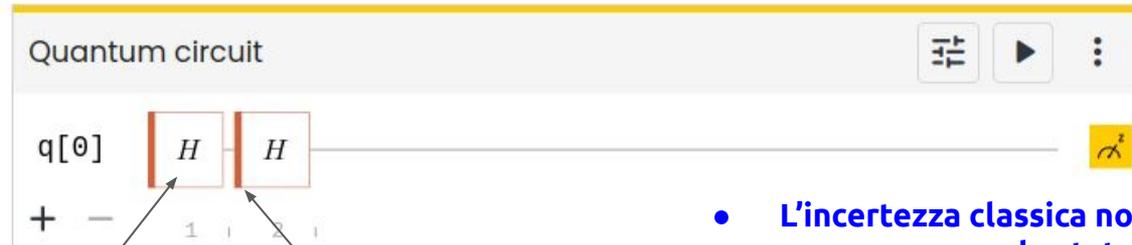
- Distinguere una sovrapposizione coerente (incertezza quantistica) da una incertezza classica

(poichè lo stato è tornato in un autostato della misura finale)

Soluzione:

$$|0\rangle \xrightarrow{H} (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2} \xrightarrow{H} |0\rangle$$

Risultato delle misure: sempre "0"



Genera incertezza quantistica (come visto nell'esempio precedente)

Inverte la prima operazione e quindi rimuove l'incertezza quantistica

- **L'incertezza classica non è invertibile: se non conosco lo stato di una moneta se la ruoto continuo a non conoscerlo.**
- **Tutte le operazioni quantistiche invece sono unitarie e quindi invertibili (a parte un processo di misura)**

Riassunto di tutto il programma svolto

"I think I can safely say that nobody understands quantum mechanics."

Richard Feynman

- I parte
(25 Maggio) {
1. Introduzione teorica e storica all'esperimento di Stern-Gerlach
 2. Applicazione didattica "Spins package": simulatore esperimento di Stern-Gerlach
- II parte
(5 Giugno) {
3. I postulati della meccanica quantistica
 4. Applicazione didattica online: simulatore interattivo di un computer quantistico

Link con tutto il materiale didattico: <https://sites.google.com/site/andreamari84/teaching-didattica?authuser=0>