

# Lukion opetussuunnitelman perusteet 2016

## Matematiikan sisällöt

Mika Setälä, Lempäälän lukio

Lauri Hellsten, Espoon yhteislyseon lukio

# Matematiikan yhteinen opintokokonaisuus

Matematiikan yhteisen opintokokonaisuuden tehtävänä on **herättää opiskelijan kiinnostus matematiikkaa kohtaan** muun muassa tutustuttamalla hänet matematiikan moninaiseen merkitykseen ihmiselle ja yhteiskunnalle sekä sen ainutlaatuisen ja kiehtovaan olemukseen tieteenalana. Tässä opintokokonaisuudessa opiskelijalla on **tilaisuus vahvistaa pohjaa matematiikan opinnoilleen** ja nähdä matematiikka hyödyllisenä ja käyttökelpoisena selitettäessä ja hallittaessa muun muassa yhteiskunnan, talouden ja luonnon tapahtumia ja tilanteita.

# MAY1: Luvut ja lukujonot

## Tavoitteet

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija pohtii

- matematiikan merkitystä yksilön ja yhteiskunnan näkökulmasta
- kertaa ja täydentää lukualueet, kertaa peruslaskutoimitukset ja prosenttilaskennan periaatteet
- vahvistaa ymmärrystään funktion käsitteestä
- ymmärtää lukujonon käsitteen (MAB6, MAA9)
- osaa määrittää lukujonoja, kun annetaan alkuehdot ja tapa, jolla seuraavat termit muodostetaan (MAA9)
- saa havainnollisen käsityksen lukujonon summan määrittämisestä
- osaa ratkaista käytännön ongelmia aritmeettisen ja geometrisen jonon ja niistä muodostettujen summien avulla (MAB6, MAA9)
- osaa käyttää teknisiä apuvälineitä funktion kuvaajan ja lukujonojen tutkimisessa sekä lukujonoihin liittyvien sovellusongelmien ratkaisussa.

# MAY1: Luvut ja lukujonot

## Keskeiset sisällöt

- reaaliluvut, peruslaskutoimitukset ja prosenttilaskenta
- funktio, kuvaajan piirto ja tulkinta
- lukujono (MAB6, MAA9)
- rekursiivinen lukujono (MAA9)
- aritmeettinen jono ja summa (MAB6, MAA9)
- geometrinen jono ja summa (MAB6, MAA9)
- logaritmi ja potenssi sekä niiden välinen yhteys (MAB3, MAA8)
- muotoa  $a^x=b$  olevien yhtälöiden ratkaiseminen (MAB3)

# MAY1-kurssin toteutus?

- Opetetaanko kurssi pitkän matematiikan opiskelijoiden, opetussuunnitelman ja yo-kisojen ehdoilla?
- Miten tulevat lyhyen matematiikan opiskelijat huomioidaan?
- Vaikutus pitkän ja lyhyen matematiikan opiskelijamääriin?
- “Montako sielua pitää pelastua pitkälle, jotta kurssi vastaisi yhteiskunnan sille asettamia tavoitteita?”
- Onko kurssin opetusta mahdollista toteuttaa opettajakeskeisesti? Miten huomioidaan opiskelijoiden lähtötasoerot? Miten opetusta on mahdollista eriyttää?



# Lyhyt matematiikka

LOPS 2003 - 2015 muutokset

# Opetuksen tavoitteet (MAB)

## LISÄYKSET

- Opetus pyrkii myös antamaan opiskelijalle selkeän käsityksen matematiikan merkityksestä yhteiskunnan kehityksessä sekä sen soveltamismahdollisuuksista arkielämässä ja monissa eri tieteissä.
- Osaa käyttää tarkoituksenmukaisia matemaattisia menetelmiä, teknisiä apuvälineitä ja tietolähteitä.

# Kurssimuutokset (MAB)

2003	2016
<b><i>Pakolliset kurssit</i></b>	
MAB1: Lausekkeet ja yhtälöt	
MAB2: Geometria	MAB2: Lausekkeet ja yhtälöt
MAB3: Matemaattisia malleja I	MAB3: Geometria
MAB4: Matemaattinen analyysi	MAB4: Matemaattisia malleja
MAB5: Tilastot ja todennäköisyys	MAB5: Tilastot ja todennäköisyys
<b>MAB6: Matemaattiset malleja II</b>	MAB6: Talousmatematiikka
<b><i>Syventävät kurssit</i></b>	
MAB7: Talousmatematiikka	MAB7: Matemaattinen analyysi
<b>MAB8: Matemaattisia malleja III</b>	<b>MAB8: Tilastot ja todennäköisyys II</b>



# MAB2: Lausekkeet ja yhtälöt

## LISÄYKSET

- osaa käyttää teknisiä apuvälineitä polynomifunktion tutkimisessa ja polynomiyhtälöihin sekä polynomifunktioihin liittyvien sovellusongelmien ratkaisussa
- yhtälöparien graafinen ja algebrallinen ratkaisemine

# MAB3: Geometria

## LISÄYKSET

- osaa käyttää teknisiä apuvälineitä kuvioiden ja kappaleiden tutkimisessa ja geometriaan liittyvien sovellusongelmien ratkaisussa.
- Pythagoraan lauseen käänteislause

# MAB4: Matemaattisia malleja

## LISÄYKSET

- tutustuu ennusteiden tekemiseen mallien pohjalta
- osaa käyttää teknisiä apuvälineitä polynomi- ja eksponenttifunktion ominaisuuksien tutkimisessa sekä polynomi- ja eksponenttiyhtälöiden ratkaisussa sovellusongelmien yhteydessä
- lukujonot matemaattisina malleina

# MAB5: Tilastot ja todennäköisyys

## SIIRROT

- Jatkuvien tilastollisten jakaumien tunnuslukujen määrittäminen.
- Normaalijakauma ja jakauman normittaminen.

## LISÄYKSET

- arvioi erilaisia regressiomalleja mm. taulukkolaskentaohjelman avulla ja tekee ennusteita mallien avulla
- osaa käyttää teknisiä apuvälineitä digitaalisessa muodossa olevan datan hakemisessa, käsittelyssä ja tutkimisessa sekä diskreettien jakaumien tunnuslukujen määrittämisessä ja todennäköisyyslaskennassa.
- regression ja korrelaation käsitteet
- havainto ja poikkeava havainto
- ennusteiden tekeminen

# MAB6: Talousmatematiikka

## LISÄYKSET

- syventää prosenttilaskennan taitojaan
- osaa käyttää teknisiä apuvälineitä laskelmien tekemisessä ja yhtälöiden ratkaisemisessa sovellusongelmissa.

# MAB7: Matemaattinen analyysi

## LISÄYKSET

- osaa käyttää teknisiä apuvälineitä funktion kulun tutkimisessa ja funktion derivaatan sekä suljetun välin ääriarvojen määrittämisessä sovellustehtävissä.
- polynomifunktion suurimman ja pienimmän arvon määrittäminen suljetulla välillä

# MAB8: Tilastot ja todennäköisyys II

## Tavoitteet

Kurssin tavoitteena on, että

- opiskelija vahvistaa ja monipuolistaa tilastojen käsittelytaitojaan
- osaa määrittää tilastollisia tunnuslukuja ja todennäköisyyksiä jatkuvien jakaumien avulla hyödyntäen teknisiä apuvälineitä (MAB5)
- osaa käyttää teknisiä apuvälineitä digitaalisessa muodossa olevan datan hakemisessa, käsittelyssä ja tutkimisessa, todennäköisyysjakauman odotusarvon ja keskihajonnan määrittämisessä, todennäköisyyksien laskemisessa annetun jakauman ja parametrien avulla sekä luottamusvälin laskemisessa.

# MAB8: Tilastot ja todennäköisyys II

## Keskeiset sisällöt

- normaalijakauma ja jakauman normittamisen käsitteet (MAB5)
- toistokoe
- binomijakauma
- luottamusvälin käsite





# Pitkä matematiikka

LOPS 2003 - 2015 muutokset

# Opetuksen tavoitteet

Matematiikan pitkän oppimäärän opetuksen tavoitteena on, että opiskelija

- saa myönteisiä oppimiskokemuksia ja tottuu pitkäjänteiseen työskentelyyn sekä oppii niiden kautta luottamaan omiin matemaattisiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa
- rohkaistuu kokeilevaan ja tutkivaan toimintaan, ratkaisujen keksimiseen sekä niiden kriittiseen arviointiin
- ymmärtää ja osaa käyttää matematiikan kieltä, kuten seuraamaan matemaattisen tiedon esittämistä, lukemaan matemaattista tekstiä, keskustelemaan matematiikasta, ja oppii arvostamaan esityksen täsmällisyyttä ja perustelujen selkeyttä
- oppii näkemään matemaattisen tiedon loogisena rakenteena
- kehittää lausekkeiden käsittely-, päättely- ja ongelmanratkaisutaitojaan

# Opetuksen tavoitteet

- harjaantuu käsittelemään tietoa matematiikalle ominaisella tavalla, tottuu tekemään otaksumia, tutkimaan niiden oikeellisuutta ja laatimaan perusteluja sekä arvioimaan perustelujen pätevyyttä ja tulosten yleistettävyyttä
- harjaantuu mallintamaan käytännön ongelmatilanteita ja hyödyntämään erilaisia ratkaisustrategioita
- osaa käyttää tarkoituksenmukaisia matemaattisia menetelmiä, teknisiä apuvälineitä ja tietolähteitä

# Ennen: Funktiot ja yhtälöt (MAA1)

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- vahvistaa **yhtälön ratkaisemisen** ja prosenttilaskennan taitojaan
- **syventää verrannollisuuden, neliöjuuren ja potenssin käsitteiden ymmärtämistään**
- **tottuu käyttämään neliöjuuren ja potenssin laskusääntöjä**
- **syventää funktiokäsitteen ymmärtämistään tutkimalla potenssi- ja eksponenttifunktioita**
- **oppi ratkaisemaan potenssiyhtälöitä.**

## *Keskeiset sisällöt*

- **potenssifunktio**
- **potenssiyhtälön ratkaiseminen**
- **juuret ja murtopotenssi**
- **eksponenttifunktio**

# Nyt: Luvut ja lukujonot (MAY1)

## *Tavoitteet*

- pohtii matematiikan merkitystä yksilön ja yhteiskunnan näkökulmasta
- kertaa ja täydentää lukualueet, kertaa peruslaskutoimitukset ja prosenttilaskennan periaatteet
- vahvistaa ymmärrystään funktion käsitteestä
- ymmärtää lukujonon käsitteen
- osaa määrittää lukujonoja, kun annetaan alkuehdot ja tapa, jolla seuraavat termit muodostetaan
- saa havainnollisen käsityksen lukujonon summan määrittämisestä
- osaa ratkaista käytännön ongelmia aritmeettisen ja geometrisen jonon ja niistä muodostettujen summien avulla
- osaa käyttää teknisiä apuvälineitä funktion kuvaajan ja lukujonojen tutkimisessa sekä lukujonoihin liittyvien sovellusongelmien ratkaisussa.

# Nyt: Luvut ja lukujonot (MAY1)

## *Keskeiset sisällöt*

- reaalityluvut, peruslaskutoimitukset ja prosenttilaskenta
- funktio, kuvaajan piirto ja tulkinta
- lukujono
- rekursiivinen lukujono
- aritmeettinen jono ja summa
- logaritmi ja potenssi sekä niiden välinen yhteys
- muotoa,  $a^x=b$ ,  $x \in \mathbb{N}$  olevien yhtälöiden ratkaiseminen
- geometrinen jono ja summa

# Pakollisissa kursseissa vain vähän muutoksia

<b>Polynomifunktiot ja yhtälöt</b>	<b>LISÄYS:</b> muistikaava $(a+b)^3$
	<b>LISÄYS:</b> osaa käyttää teknisiä apuvälineitä polynomifunktion tutkimisessa ja polynomiyhtälöihin ja polynomiepäyhtälöihin sekä polynomifunktioihin liittyvien sovellusongelmien ratkaisussa.
<b>Geometria</b>	<b>LISÄYS:</b> osaa käyttää teknisiä apuvälineitä kuvioiden ja kappaleiden tutkimisessa ja geometriaan liittyvien sovellusongelmien ratkaisussa.
<b>Vektorit</b>	<b>LISÄYS:</b> yhtälöryhmän ratkaiseminen
	<b>LISÄYS:</b> osaa käyttää teknisiä apuvälineitä vektoreiden tutkimisessa sekä suoriin ja tasoihin liittyvien sovellusongelmien ratkaisussa.
<b>Analyttinen geometria</b>	<b>POISTO:</b> yhtälöryhmän ratkaiseminen
	<b>LISÄYS:</b> osaa käyttää teknisiä apuvälineitä pistejoukon yhtälön tutkimisessa sekä yhtälöiden, yhtälöryhmien, itseisarvoyhtälöiden ja epäyhtälöiden ratkaisemisessa sovellusongelmissa.

# Pakollisissa kursseissa vain vähän muutoksia

<b>Derivaatta</b>	<b>LISÄYS:</b> osaa käyttää teknisiä apuvälineitä raja-arvon, jatkuvuuden ja derivaatan tutkimisessa ja rationaaliyhtälöiden ja -epäyhtälöiden ratkaisemisessa sekä polynomi- ja rationaalifunktion derivaatan määrittämisessä sovellusongelmissa.
<b>Trigonometriset funktiot</b>	<b>LISÄYS:</b> osaa derivoida yhdistettyjä funktioita; yhdistetyn funktion derivaatta
	<b>LISÄYS:</b> osaa hyödyntää trigonometrisia funktioita mallintaessaan jaksollisia ilmiöitä
	<b>LISÄYS:</b> osaa käyttää teknisiä apuvälineitä trigonometrinen funktioiden tutkimisessa ja trigonometrinen yhtälöiden ratkaisemisessa ja trigonometrinen funktioiden derivaattojen määrittämisessä sovellusongelmissa.
	<b>HUOM!</b> Lukujonot siirtyneet toiseen kurssiin mutta yhdistetyn funktion derivaatta täyttäneen tämän tilan.



# Pakollisissa kursseissa vain vähän muutoksia

<b>Juuri- ja logaritmfunktiot</b>	<b>POISTO:</b> oppii yhdistetyn funktion derivoimisen, käänteisfunktio, tutkii aidosti monotonisten funktioiden käänteisfunktioita
	<b>LISÄYS:</b> kertaa potenssienlaskusäännöt mukaan lukien murtopotenssit
	<b>LISÄYS:</b> osaa hyödyntää eksponenttifunktiota mallintaessaan erilaisia kasvamisen ja vähenemisen ilmiöitä
	<b>LISÄYS:</b> osaa käyttää teknisiä apuvälineitä juuri-, eksponentti- ja logaritmfunktioiden tutkimisessa ja juuri-, eksponentti- ja logaritmiyhtälöiden ratkaisemisessa sekä juuri-, eksponentti- ja logaritmfunktion derivaattojen määrittämisessä sovellusongelmissa
<b>Integraalilaskenta</b>	<b>LISÄYS:</b> osaa käyttää teknisiä apuvälineitä funktion ominaisuuksien tutkimisessa ja integraalifunktion määrittämisessä sekä määrätyn integraalin laskemisessa sovellusongelmissa.
<b>Todennäköisyys ja tilastot</b>	<b>LISÄYS:</b> osaa käyttää teknisiä apuvälineitä digitaalisessa muodossa olevan datan hakemisessa, käsittelyssä ja tutkimisessa sekä jakaumien tunnuslukujen määrittämisessä ja todennäköisyyksien laskemisessa annetun jakauman ja parametrien avulla.

# Ennen: Lukuteoria ja logiikka (MAA11)

## *Tavoitteet*

- oppii formalisoimaan väitelauseita ja tutkimaan niiden totuusarvoja totuustaulujen avulla
- ymmärtää avoimen lauseen käsitteen ja oppii käyttämään kvanttoreita
- oppii todistusperiaatteita ja harjoittelee todistamista
- oppii lukuteorian peruskäsitteet ja perehtyy alkulukujen ominaisuuksiin
- osaa tutkia kokonaislukujen jaollisuutta jakoyhtälön ja kokonaislukujen kongruenssin avulla
- osaa määrittää kokonaislukujen suurimman yhteisen tekijän Eukleideen algoritmilla.

# Ennen: Lukuteoria ja logiikka (MAA11)

## *Keskeiset sisällöt*

- lauseen formalisoiminen
- lauseen totuusarvot
- avoin lause
- kvanttorit
- suora, käänteinen ja ristiriitatodistus
- kokonaislukujen jaollisuus ja jakoyhtälö
- Eukleideen algoritmi
- alkuluvut
- aritmetiikan peruslause
- kokonaislukujen kongruenssi

# Nyt:Lukuteoria ja todistaminen (MAA11)

## *Tavoitteet*

- perehtyy **logiikan alkeisiin** ja tutustuu todistusperiaatteisiin sekä harjoittelee todistamista
- hallitsee lukuteorian peruskäsitteet ja perehtyy alkulukujen ominaisuuksiin
- osaa tutkia kokonaislukujen jaollisuutta jakoyhtälön ja kokonaislukujen kongruenssin avulla
- **syventää ymmärrystään lukujonoista ja niiden summista**
- **osaa käyttää teknisiä apuvälineitä lukujen ominaisuuksien tutkimisessa.**

# Nyt:Lukuteoria ja todistaminen (MAA11)

## *Keskeiset sisällöt*

- konnektiivit ja totuusarvot
- geometrinen todistaminen
- suora, käänteinen ja ristiriitatodistus
- **induktiotodistus**
- kokonaislukujen jaollisuus ja jakoyhtälö
- Eukleideen algoritmi
- alkuluvut ja Eratostheneen seula
- aritmetiikan peruslause
- kokonaislukujen kongruenssi

# Ennen: Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä (MAA12)

## *Tavoitteet*

- oppii ymmärtämään absoluuttisen ja suhteellisen virheen käsitteet ja niiden avulla likiarvolaskujen tarkkuutta koskevat säännöt peruslaskutoimitusten tapauksessa
- ymmärtää iteroinnin käsitteen ja oppii ratkaisemaan yhtälöitä numeerisesti
- oppii tutkimaan polynomien jaollisuutta ja määrittämään polynomin tekijät
- oppii algoritmista ajattelua
- harjaantuu käyttämään nykyaikaisia matemaattisia välineitä
- oppii määrittämään numeerisesti muutosnopeutta ja pinta-alaa.

# Ennen: Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä (MAA12)

## *Keskeiset sisällöt*

- **absoluuttinen ja suhteellinen virhe**
- Newtonin menetelmä ja iterointi
- polynomien jakoalgoritmi
- polynomien jakoyhtälö
- muutosnopeus ja pinta-ala

# Nyt: Algoritmit matematiikassa (MAA12)

## *Tavoitteet*

- syventää algoritmista ajatteluaan
- **osaa tutkia ja selittää, kuinka algoritmit toimivat**
- ymmärtää iteroinnin käsitteen ja oppii ratkaisemaan **epälineaarisia** yhtälöitä numeerisesti
- osaa tutkia polynomien jaollisuutta ja osaa määrittää polynomin tekijät
- osaa määrittää numeerisesti muutosnopeutta ja pinta-alaa
- **osaa käyttää teknisiä apuvälineitä algoritmien tutkimisessa ja laskutoimituksissa.**



# Nyt: Algoritmit matematiikassa (MAA12)

## *Keskeiset sisällöt*

- iterointi ja Newton-Raphsonin menetelmä
- polynomien jakoalgoritmi
- polynomien jakoyhtälö
- Newton-Cotes-kaavat: suorakaidesääntö, puolisuunnikassääntö ja Simpsonin sääntö

# Ennen: Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi (MAA13)

## *Tavoitteet*

- syventää differentiaali- ja integraalilaskennan teoreettisten perusteiden tuntemustaan
- täydentää integraalilaskennan taitojaan ja soveltaa niitä muun muassa jatkuvien todennäköisyysjakaumien tutkimiseen
- tutkii lukujonon raja-arvoa, sarjoja ja niiden summia

# Ennen: Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi (MAA13)

## *Keskeiset sisällöt*

- funktion jatkuvuuden ja derivoituvuuden tutkiminen
- jatkuvien ja derivoituvien funktioiden yleisiä ominaisuuksia
- funktioiden ja lukujonojen raja-arvot äärettömydessä
- epäoleelliset integraalit

# Nyt: Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi (MAA13)

## *Tavoitteet*

- syventää differentiaali- ja integraalilaskennan teoreettisten perusteiden tuntemustaan
- osaa tutkia aidosti monotonisten funktioiden käänteisfunktioita
- täydentää integraalilaskennan taitojaan ja soveltaa niitä muun muassa jatkuvien todennäköisyysjakaumien tutkimiseen
- osaa tutkia lukujonon raja-arvoa, sarjoja ja niiden summia
- osaa käyttää teknisiä apuvälineitä funktion ominaisuuksien tutkimisessa ja derivaatan laskemisessa annetun muuttujan suhteen sekä epäoleellisten integraalien, lukujonon raja-arvon ja sarjan summan laskemisessa sovellustehtävissä.

# Nyt: Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi (MAA13)

## *Keskeiset sisällöt*

- funktion jatkuvuuden ja derivoituvuuden tutkiminen
- jatkuvien ja derivoituvien funktioiden yleisiä ominaisuuksia
- **käänteisfunktio**
- **kahden muuttujan funktio ja osittaisderivaatta**
- funktioiden ja lukujonojen raja-arvot äärettömyydessä
- epäoleelliset integraalit
- lukujonon raja-arvo, sarjat ja niiden summa