

MEDIA MENGAJAR
MATEMATIKA
SISTEM PERSAMAAN DAN
PERTIDAKSAMAAN LINEAR

masdayat.net / qanda.id

UNTUK SMA/MA KELAS X

masdayat.net / qanda.id

BAB 4

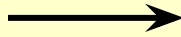
SISTEM PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN LINEAR

Sumber gambar: Shutterstock.com

4.1 Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel

Himpunan titik-titik yang memenuhi persamaan tersebut, yaitu $\{(x, y, z) \mid ax + by + cz = d\}$ adalah suatu bidang datar dalam sumbu-sumbu ortogonal x , y , dan z .

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$



Hanya mempunyai satu penyelesaian untuk x , y , dan z , yaitu (x, y, z) .



Sumber: pixabay.com

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear tiga variabel dapat menggunakan metode substitusi ataupun metode eliminasi.

Metode Substitusi

langkah-langkah sebagai berikut.

1. Pilihlah salah satu persamaan yang sederhana. Nyatakan x sebagai fungsi y dan z , atau y sebagai fungsi x dan z , atau z sebagai fungsi x dan y .
2. Substitusikan x , atau y , atau z yang diperoleh pada Langkah 1 ke dua persamaan yang lainnya sehingga diperoleh sistem persamaan linear dua variabel.
3. Selesaikan sistem persamaan linear dua variabel yang diperoleh pada Langkah 2.
4. Substitusikan dua nilai variabel yang diperoleh pada Langkah 3 ke salah satu persamaan semula untuk memperoleh nilai variabel yang ketiga.

Contoh

Tentukan himpunan penyelesaian dari system persamaan berikut dengan metode substitusi.

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 23 & \dots (1) \\ 3x - y + 3z = 15 & \dots (2) \\ 5x + y - 2z = -2 & \dots (3) \end{cases}$$

Jawab:

$$\begin{aligned} 5x + y - 2z &= -2 \\ y &= -5x + 2z - 2 \quad \dots (4) \end{aligned}$$

Substitusi persamaan (4) ke persamaan (2).

$$\begin{aligned} 3x - y + 3z &= 15 \\ 3x - (-5x + 2z - 2) + 3z &= 15 \\ 3x + 5x - 2z + 2 + 3z &= 15 \\ 8x + z &= 13 \quad \dots (5) \end{aligned}$$

Substitusi persamaan (4) ke persamaan (1).

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 3z &= 23 \\ 2x + 2(-5x + 2z - 2) + 3z &= 23 \\ 2x - 10x + 4z - 4 + 3z &= 23 \\ -8x + 7z &= 27 \end{aligned}$$

Persamaan (5) dan persamaan (6) membentuk sistem persamaan linear dua variabel.

$$\begin{cases} 8x + z = 13 \\ -8x + 7z = 27 \end{cases}$$

SPLDV tersebut akan diselesaikan dengan metode substitusi.

$$8x + z = 13 \Leftrightarrow z = -8x + 13 \quad \dots (7)$$

Substitusi persamaan (7) ke persamaan (6):

$$-8x + 7z = 27$$

$$-8x + 7(-8x + 13) = 27$$

$$-8x - 56x + 91 = 27$$

$$-64x = -64$$

$$\mathbf{x = 1}$$

Substitusi $x = 1$ ke persamaan (7):

$$z = -8x + 13$$

$$z = -8(1) + 13$$

$$\mathbf{z = 5}$$

Dari SPLDV Mempunyai penyelesaian $x = 1$ dan $z = 5$.

Substitusi $x = 1$ dan $z = 5$ ke persamaan (3):

$$5x + y - 2z = -2$$

$$5(1) + y - 2(5) = -2$$

$$y - 5 = -2$$

$$\mathbf{y = 3}$$

Himpunan penyelesaiannya adalah $\{(1, 3, 5)\}$.



Metode Eliminasi

Langkah-langkah sebagai berikut.

1. Eliminasi salah satu variabel, x atau y atau z sehingga diperoleh sistem persamaan linear dua variabel.
2. Selesaikan sistem persamaan linear dua variabel pada Langkah 1 sehingga diperoleh nilai dua variabel, x dan y atau x dan z atau y dan z .
3. Substitusikan nilai-nilai variabel yang diperoleh pada Langkah 2 ke salah satu persamaan semula untuk mendapatkan nilai variabel yang ketiga.

Contoh

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan berikut dengan metode eliminasi.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -4 & \dots (1) \\ 2x - y + z = 5 & \dots (2) \\ 3x + 2y + z = 16 & \dots (3) \end{cases}$$

Jawab:

Eliminasi z dari persamaan (1) dan (2), kemudian persamaan (2) dan (3).

$$\begin{array}{r} x + 2y - 3z = -4 \quad | \times 1 | \quad x + 2y - 3z = -4 \\ 2x - y + z = 5 \quad | \times 3 | \quad 6x - 3y + 3z = 15 \\ \hline 7x - y = 11 \quad \dots (4) \end{array} +$$

$$\begin{array}{r} 2x - y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 16 \quad | - \\ \hline -x - 3y = -11 \quad \dots (5) \end{array}$$

Eliminasi persamaan (4) dan (5).

$$\begin{array}{r} 7x - y = 11 \quad | \times 3 | \quad 21x - 3y = 33 \\ -x - 3y = -11 \quad | \times 1 | \quad -x - 3y = -11 \\ \hline 22x = 44 \\ x = 2 \\ 7x - y = 11 \quad | \times 1 | \quad 7x - y = 11 \\ -x - 3y = -11 \quad | \times 7 | \quad -7x - 21y = -77 \\ \hline -22y = -66 \\ y = 3 \end{array} +$$

Substitusi $x = 2$ dan $y = 3$ ke persamaan (2)

$$\begin{array}{r} 2x - y + z = 5 \\ 2(2) - 3 + z = 5 \\ z = 4 \end{array}$$

Jadi, penyelesaiannya adalah $\{(2, 3, 4)\}$

Contoh

Ayu, Bimo, dan Candra berbelanja di sebuah toko buku secara bersamaan. Ayu membeli 3 set pensil, 4 buku tulis, dan 1 penghapus. Bimo membeli 6 set pensil, 2 buku tulis, dan 1 penghapus. Candra membeli 2 set pensil, 5 buku tulis, dan 10 penghapus. Di kasir, Ayu membayar Rp83.000,00; Bimo membayar Rp86.000,00; dan Candra membayar Rp158.000,00. Berapa harga masing-masing benda tersebut?

Jawab:

Misalkan: x = harga 1 set pensil

y = harga 1 buah buku tulis

z = harga 1 buah penghapus

$$\text{Sistem peramaannya adalah } \begin{cases} 3x + 4y + z = 83.000 \\ 6x + 2y + z = 86.000 \\ 2x + 5y + 10z = 158.000 \end{cases}$$



Eliminasi Persamaan (1) dan Persamaan (2):

$$3x + 4y + z = 83.000$$

$$\underline{6x + 2y + z = 86.000} \quad -$$

$$-3x + 2y = -3.000 \quad \dots (4)$$

Eliminasi persamaan (2) dan persamaan (3):

$$\begin{array}{r|l|l} 6x + 2y + z = 86.000 & \times 10 & 60x + 20y + 10z = 860.000 \\ 2x + 5y + 10z = 158.000 & \times 1 & 2x + 5y + 10z = 158.000 \\ \hline & & 58x + 15y = 702.000 \quad \dots (5) \end{array}$$

Eliminasi persamaan (4) dan persamaan (5):

$$\begin{array}{r|l|l} -3x + 2y = -3.000 & \times 15 & -45x + 30y = -45.000 \\ 58x + 15y = 702.000 & \times 2 & 116x + 30y = 1.404.000 \\ \hline & & -161x = -1.449.000 \\ & & x = 9.000 \end{array}$$

Substitusi $x = 9.000$ ke persamaan (4):

$$-3x + 2y = -3.000$$

$$-3(9.000) + 2y = -3.000$$

$$-27.000 + 2y = -3.000$$

$$2y = 24.000$$

$$y = 12.000$$

Substitusi $x = 9.000$ dan $y = 12.000$ ke persamaan (1):

$$3x + 4y + z = 83.000$$

$$3(9.000) + 4(12.000) + z = 83.000$$

$$27.000 + 48.000 + z = 83.000$$

$$z = 8.000$$

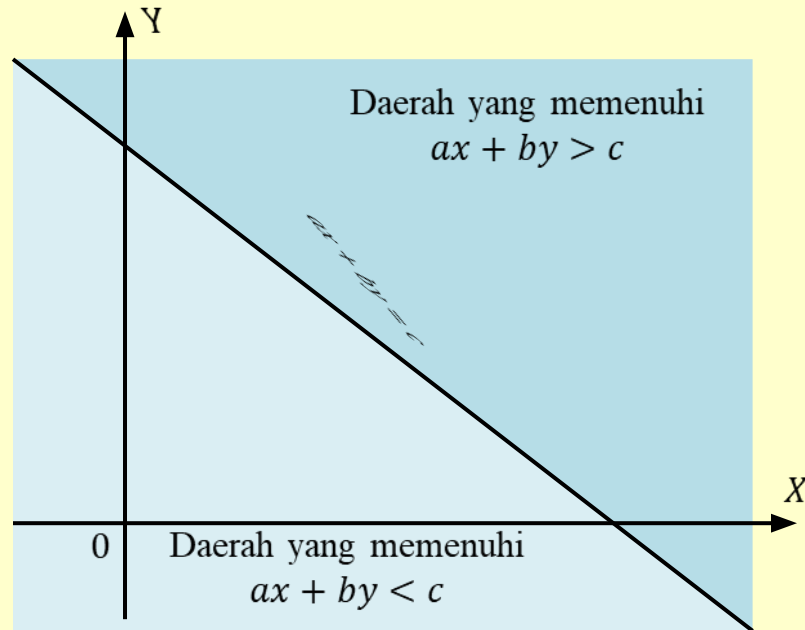
Jadi, harga 1 set pensil adalah Rp.9.000,00; harga 1 buah buku tulis adalah Rp12.000,00; dan harga 1 buah penghapus adalah Rp8.000,00.



4.2 Pertidaksamaan Linear

Gambar di samping menunjukkan garis $ax + by = c$ yang memberikan tiga penyelesaian, yaitu:

1. Himpunan titik-titik (x, y) yang memenuhi garis $ax + by = c$.
2. Himpunan titik-titik (x, y) yang memenuhi pertidaksamaan $ax + by > c$, dan
3. Himpunan titik-titik (x, y) yang memenuhi pertidaksamaan $ax + by < c$.



Contoh

Tentukan daerah penyelesaian dari suatu sistem pertidaksamaan berikut.

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 6 \\ x - y < 1 \\ x \geq -1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Jawab:

$$2x + 3y = 6 \rightarrow$$

0	0	3
1	2	0

$$x - y = 1 \rightarrow$$

0	0	1
1		0

Ambil titik selidik (0, 1).

- $2x + 3y \leq 6$
 $2(0) + 3(1) \leq 6$
 $3 \leq 6$ (benar)
- $x - y < 1$
 $0 - 1 < 1$
 $-1 < 1$ (benar)
- $x \geq -1$
 $0 \geq -1$ (benar)
- $y \geq 0$
 $1 \geq 0$ (benar)

Arsirlah daerah yang memuat (0, 1).

Jadi, daerah penyelesaiannya adalah daerah yang diarsir seperti pada gambar di samping.

