SERIES NUMERIQUES

1 Généralités

1.1 définitions

définition 1: sommes partielles

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes définie à partir du rang n_0

1. La quantité $S_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$ s'appelle la somme partielle d'indice n
2. On appelle série numérique de terme général u_n, et on note $\sum u_n$, ou $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$, la suite $(S_n)_{n \geqslant n_0}$.

On retiendra qu'une série n'est rien d'autre qu'une suite définie de manière particulière.

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$$

l'étude de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$

correspond à l'étude de la suite (S_n) *définie par*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

~~WY YG~~

What you see is what you get

définition 2: CV, DV, somme d'une série

Soit $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ une série.

i) On dit que <u>la série $\sum u_n$ converge</u> (CV) lorsque la suite des sommes partielles (S_n) converge.

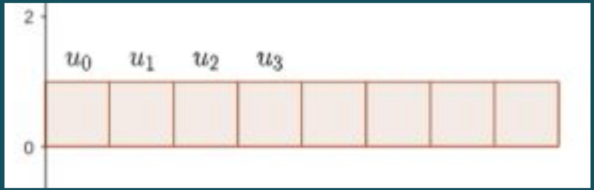
Dans ce cas, on appelle <u>somme de la série $\sum u_n$</u>, et on note $\boxed{\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} u_k}$ ou $\boxed{\sum\limits_{n_0}^{\infty} u_k}$, la limite de la suite des sommes partielles

$$\sum_{n_0}^{\infty} u_k = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

ii) Dans le cas contraire, on dit que <u>la série de terme général u_n diverge (DV)</u>

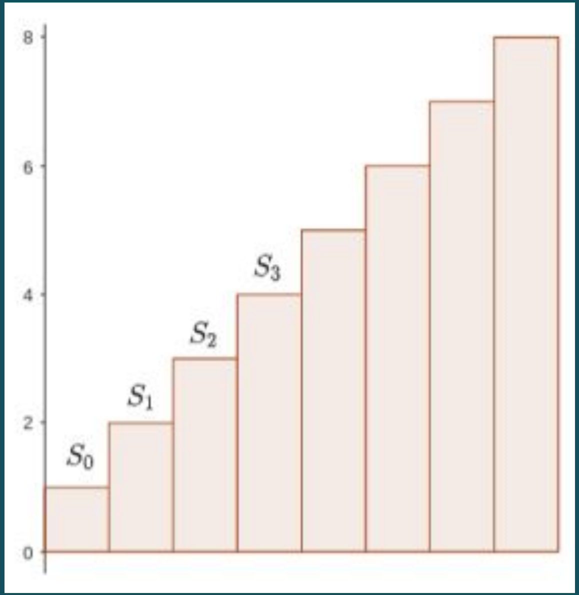
rem: on fera bien la différence entre $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ *et* $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} u_k$

$$\sum_{n \geqslant 0} 1$$



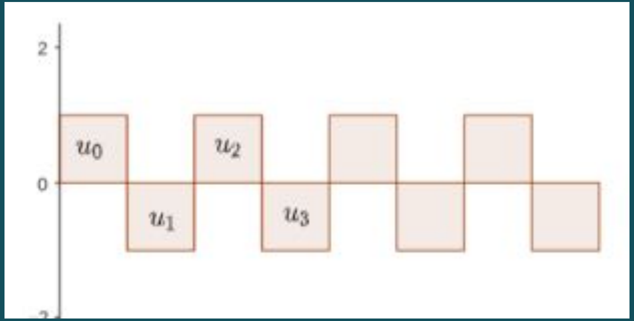
tg positif $\Leftrightarrow (S_n)$ croissante

n	u_n	S_n
0	1	
1	1	
2	1	
3	1	
4	1	
5	1	
6	1	
7	1	



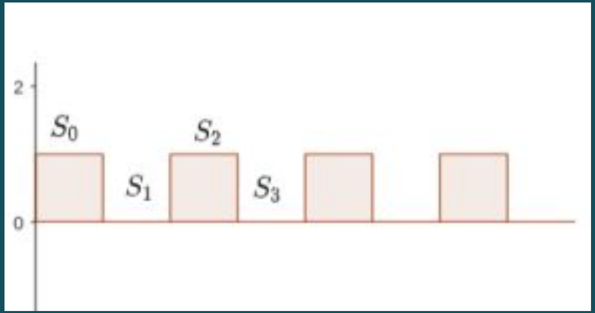
clairement $\lim_{n \to \infty} S_n = +\infty$

$$\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n$$



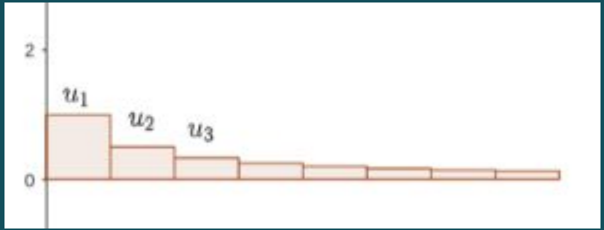
n	u_n	S_n
0	1	
1	-1	
2	1	
3	-1	
4	1	
5	-1	
6	1	
7	-1	

suite (S_n) NON monotone



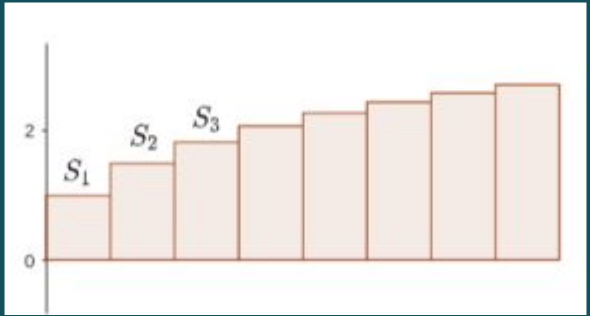
(S_n) NE possède PAS de limite

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$$



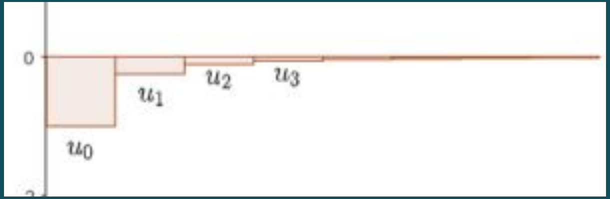
n	u_n	S_n
1	1.00	1.00
2	0.50	1.50
3	0.33	1.83
4	0.25	2.08
5	0.20	2.28
6	0.17	2.45
7	0.14	2.59
8	0.12	2.72

tg positif $\Leftrightarrow$ (S_n) croissante



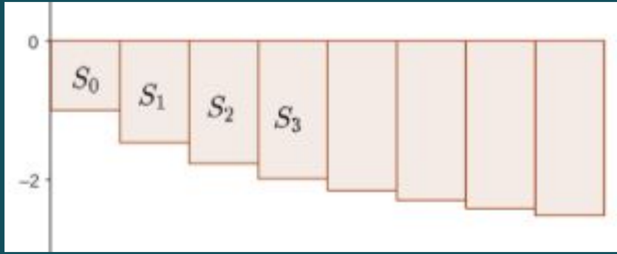
on montrera que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{-1}{n^{1.1}}$$



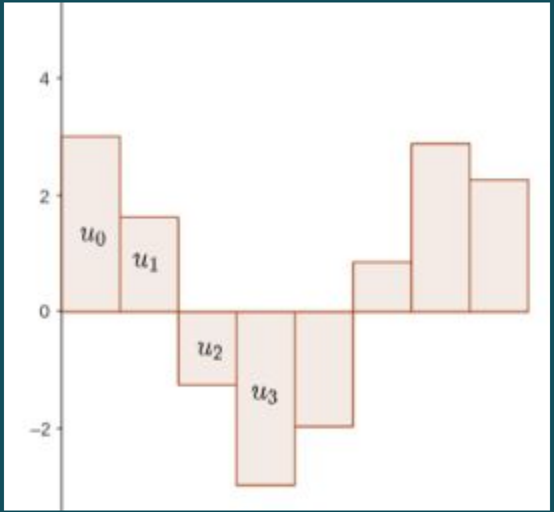
n	u_n	S_n
1	-1.00	-1.00
2	-0.47	-1.47
3	-0.30	-1.77
4	-0.22	-1.99
5	-0.17	-2.16
6	-0.14	-2.30
7	-0.12	-2.42
8	-0.10	-2.52

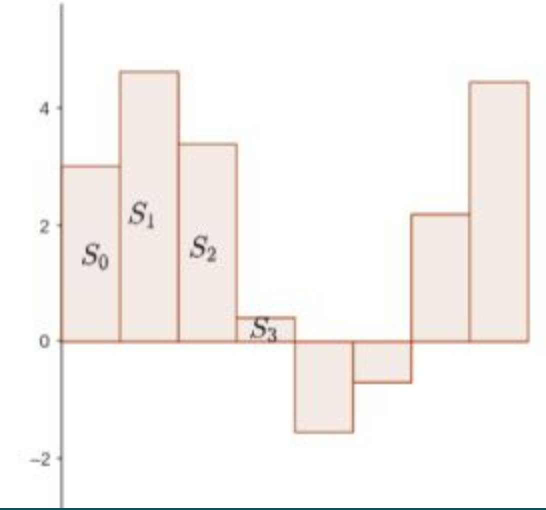
tg négatif $\Leftrightarrow$ (S_n) décroissante
on montrera que (S_n) converge



$$\sum_{n\geqslant 0} 3.\cos n$$

n	u_n	S_n
1	3.00	3.00
2	1.62	4.62
3	-1.24	3.38
4	-2.97	0.41
5	-1.96	-1.55
6	0.85	-0.70
7	2.88	2.18
8	2.26	4.44





difficile!

exemple 1:

Pour chacune des séries déterminer la somme partielle d'indice n et préciser si la série converge

$$a)\ \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \qquad b)\ \sum_{n\geqslant 3}(-1)^n \qquad c)\ \sum_{n\geqslant 0} n \qquad d)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)} \qquad e)\ \sum_{n\geqslant 1}\ln\frac{n}{n+1}$$

1.3 grossière divergence

Q: DANS CERTAINS CAS, PEUT-ON RAPIDEMENT DIRE QU'UNE SÉRIE DIVERGE?

théorème 1: condition nécessaire de convergence

Pour qu'une série converge, il faut que son terme général tende vers 0 .
Attention ! La réciproque est fausse : le terme général d'une série peut tendre vers zéro sans que pour autant la série ne converge(cf. exemple plus bas).

$$\sum u_n \text{ CV} \implies \lim u_n = 0 \qquad \text{MAIS} \qquad \lim u_n = 0 \not\Longrightarrow \sum u_n \text{ CV}$$

définition 3: grossière divergence

Soit $\sum u_n$ une série.
On dit que la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente (GDV) lorsque son terme général ne tend pas vers 0, càd lorsque la suite (u_n) ne tend pas vers 0

exemple 2:

Parmi les séries ci-dessous, indiquer celles qui sont grossièrement divergentes

$$a)\ \sum_{n\geqslant 1} n^2 \qquad b)\ \sum_{n\geqslant 1} n.\sin\frac{1}{n} \qquad c)\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{n^{2050}}{2^n} \qquad d)\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n.n^2}{n+4}$$

exemple 3: la série harmonique est DV mais pas GDV

La série harmonique est la série $\sum \frac{1}{n}$.

On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. prouver que pour tout $n \geqslant 1, S_{2n} - S_n \geqslant 1/2$
2. en raisonnant par l'absurde, montrer que $\sum \frac{1}{n}$ diverge

1. *Soit* $n \geqslant 1$.

   On a

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

   On a

$$\forall k \in [\![n+1, 2n]\!], \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n}$$

   et donc

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n.\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

exemple 3: la série harmonique est DV mais pas GDV

La série harmonique est la série $\sum \frac{1}{n}$.

On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. prouver que pour tout $n \geqslant 1, S_{2n} - S_n \geqslant 1/2$
2. en raisonnant par l'absurde, montrer que $\sum \frac{1}{n}$ diverge

2. ***Supposons que la série $\sum \frac{1}{n}$ converge.***
   Notons S la limite finie de la suite (S_n), càd $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.
   Comme (S_{2n}) est une suite extraite de la suite (S_n), on sait que $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$ également.
   Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} - S_n = S - S = 0$.
   Or comme pour tout n on a $S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$, on doit avoir $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$.
   contradiction
   Conclusion: la série de terme général $\frac{1}{n}$ est divergente

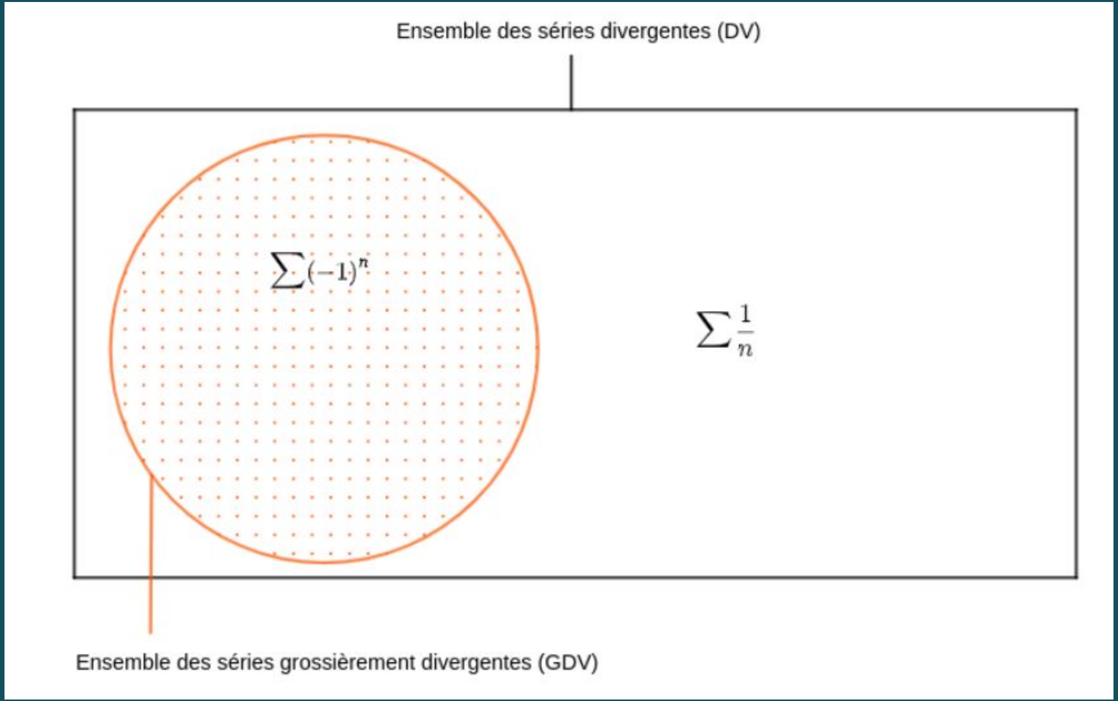
remarque: on montre qu'il existe une constante γ tel que $S_n = \ln n + \gamma + o(1)$

théorème 1: condition nécessaire de convergence

Pour qu'une série converge, il faut que son terme général tende vers 0 .

$$\sum u_n \; CV \Longrightarrow \lim u_n = 0$$

$$\lim u_n \neq 0 \Longrightarrow \sum u_n \; DV$$



$$\lim u_n = 0 \not\Longrightarrow \sum u_n \; CV$$

1.4 procédé télescopique

exemple 4:

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ avec $n \geqslant 1$

théorème 2: lien entre suite et série - à savoir redémontrer

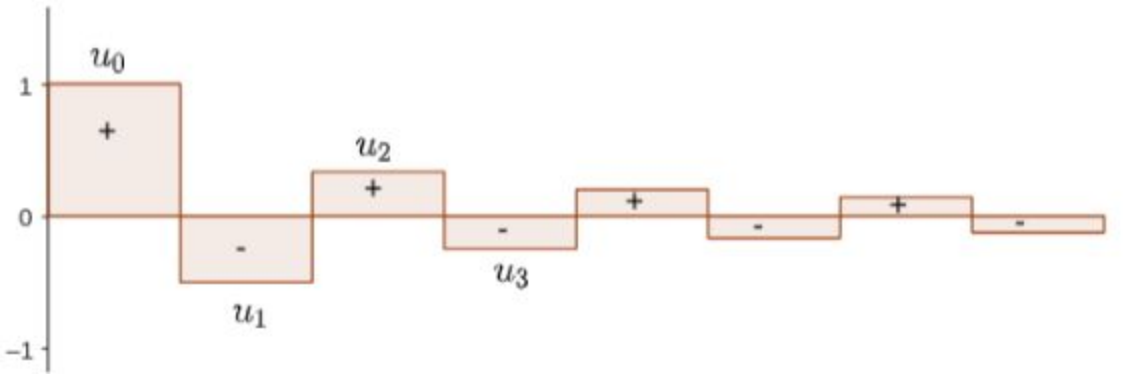
la suite (v_n) converge **si et seulement si** la série de terme général $u_n = v_{n+1} - v_n$ converge

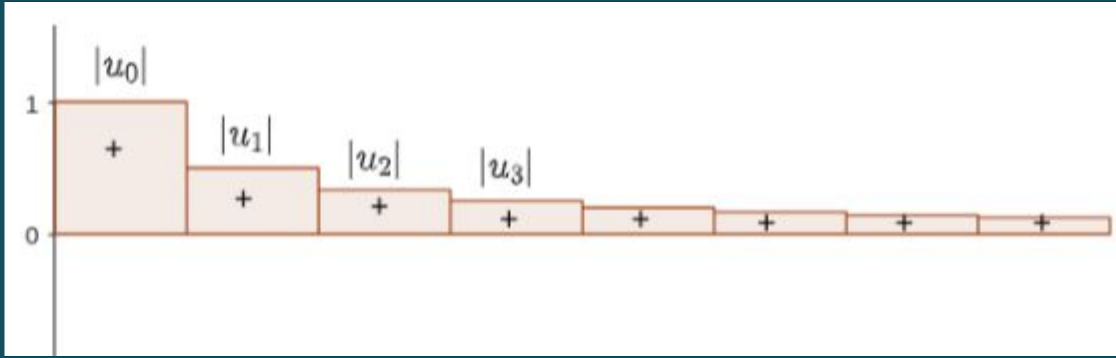
c'est à dire:

$$(v_n) \text{ converge } \iff \sum v_{n+1} - v_n \text{ converge}$$

Dans le cas de convergence : $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k) = (\lim_{n\to+\infty} v_n) - v_{n_0}$

1.5 Convergence absolue





1.5 Convergence absolue

définition 4: convergence absolue

On dit que la série $\sum un$ est absolument convergente (AVC) lorsque la série de terme général $|u_n|$ converge, càd lorsque $\sum |u_n|$ converge

théorème 3: "l'absolue convergence entraîne la convergence"

Si $\sum u_n$ est une série ACV alors $\sum u_n$ est une série CV.
et l'on a la majoration

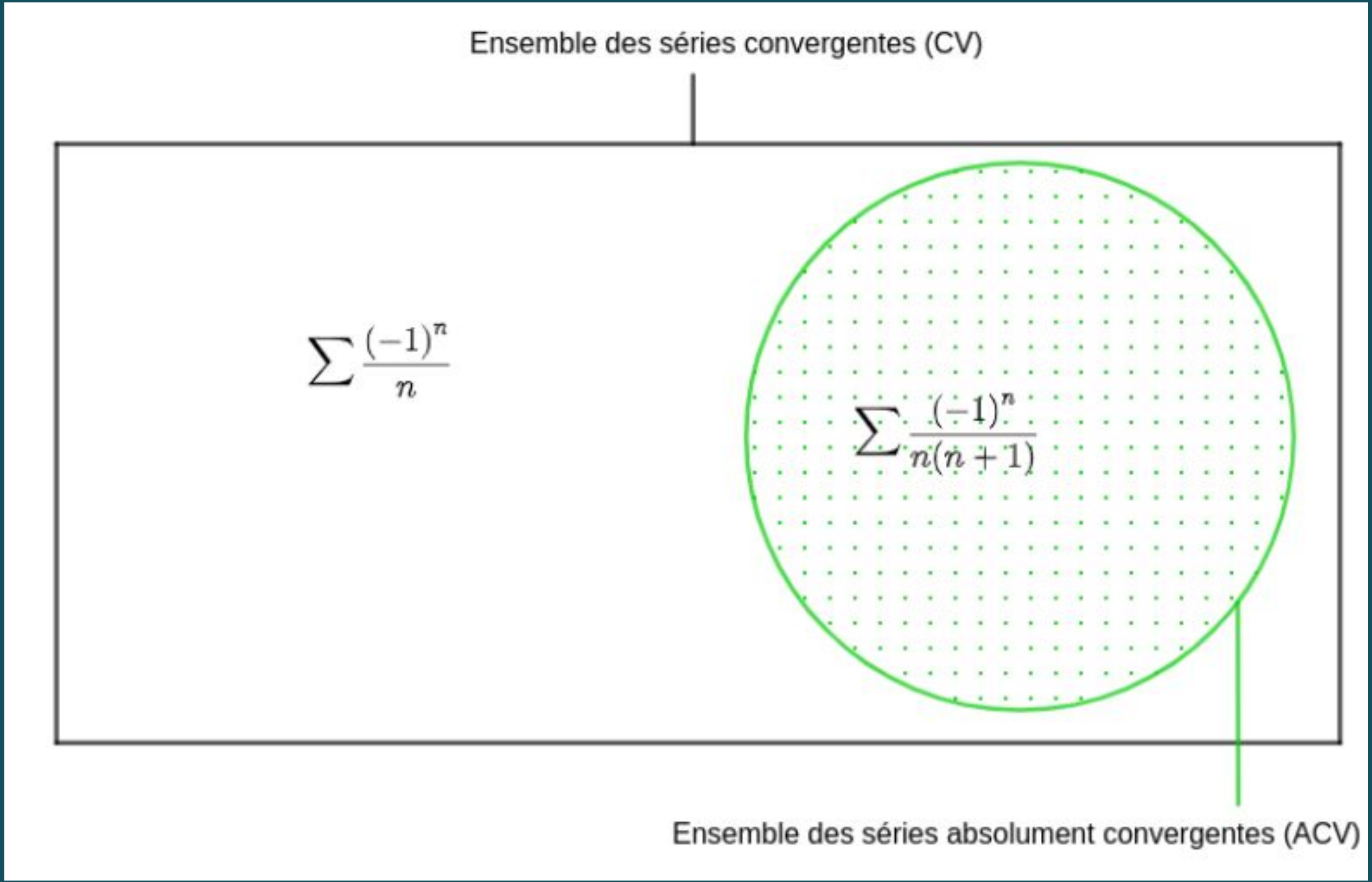
$$\boxed{|\sum_{n_0}^{\infty} u_n| \leqslant \sum_{n_0}^{\infty} |u_n|}$$

"Toute série absolument convergente est convergente"

$$\sum u_n \ ACV \Longrightarrow \sum u_n \ CV$$

mais la réciproque est fausse)

$$\sum u_n \ CV \not\Longrightarrow \sum u_n \ ACV$$


Ensemble des séries convergentes (CV)
$\sum \frac{(-1)^n}{n}$
$\sum \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$
Ensemble des séries absolument convergentes (ACV)

1.6 Les 3 exemples de référence

théorème 4: séries géométriques

Soit $a \in \mathbb{C}$.

$\boxed{\text{La série } \sum a^n \text{ converge [converge absolument] } \textbf{ssi } |a| < 1}$, et dans ce cas $\boxed{\sum_0^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}}$

D'une manière plus générale, une série géométrique est une série dont le terme général est du type $C.a^n$, où a et C sont deux constantes indépendantes de n

théorème 5: exponentielle complexe

Pour tout complexe z, la série de terme général $\frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente et $\boxed{\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}}$

théorème 6: Séries de Riemann (énoncé classique)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{la série de terme général } \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.}$

rem: comme le terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ est positif, les cas de CV et d'ACV sont les mêmes:

La série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ est ACV ssi $\alpha > 1$

théorème 4: séries géométriques

Soit $a \in \mathbb{C}$.

$\boxed{\text{La série } \sum a^n \text{ converge [converge absolument] } \textbf{ssi } |a| < 1}$, et dans ce cas $\boxed{\sum_0^\infty a^n = \frac{1}{1-a}}$

D'une manière plus générale, une série géométrique est une série dont le terme général est du type $C.a^n$, où a et C sont deux constantes indépendantes de n

$a \in \mathbb{C}$	$\lvert a\rvert < 1$	$\lvert a\rvert \geqslant 1$
$\sum a^n$	ACV (et CV)	GDV (et DV)

théorème 5: exponentielle complexe

Pour tout complexe z, la série de terme général $\dfrac{z^n}{n!}$ est absolument convergente et $\boxed{\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}}$

exemple 5:

On considère la série $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{(i\pi)^n}{n!}$.

Grâce au théorème précédent, on peut affirmer DIRECTEMENT que

i) cette série est ACV

ii) la somme de cette série est $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(i\pi)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(i\pi)^n}{n!} - \dfrac{(i\pi)^0}{0!} = \exp(i\pi) - 1 = e^{i\pi} - 1 = -2$

théorème 6: Séries de Riemann (énoncé classique)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{la série de terme général } \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge \underline{si et seulement si} } \alpha > 1.}$$

rem: comme le terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ *est positif, les cas de CV et d'ACV sont les mêmes:*

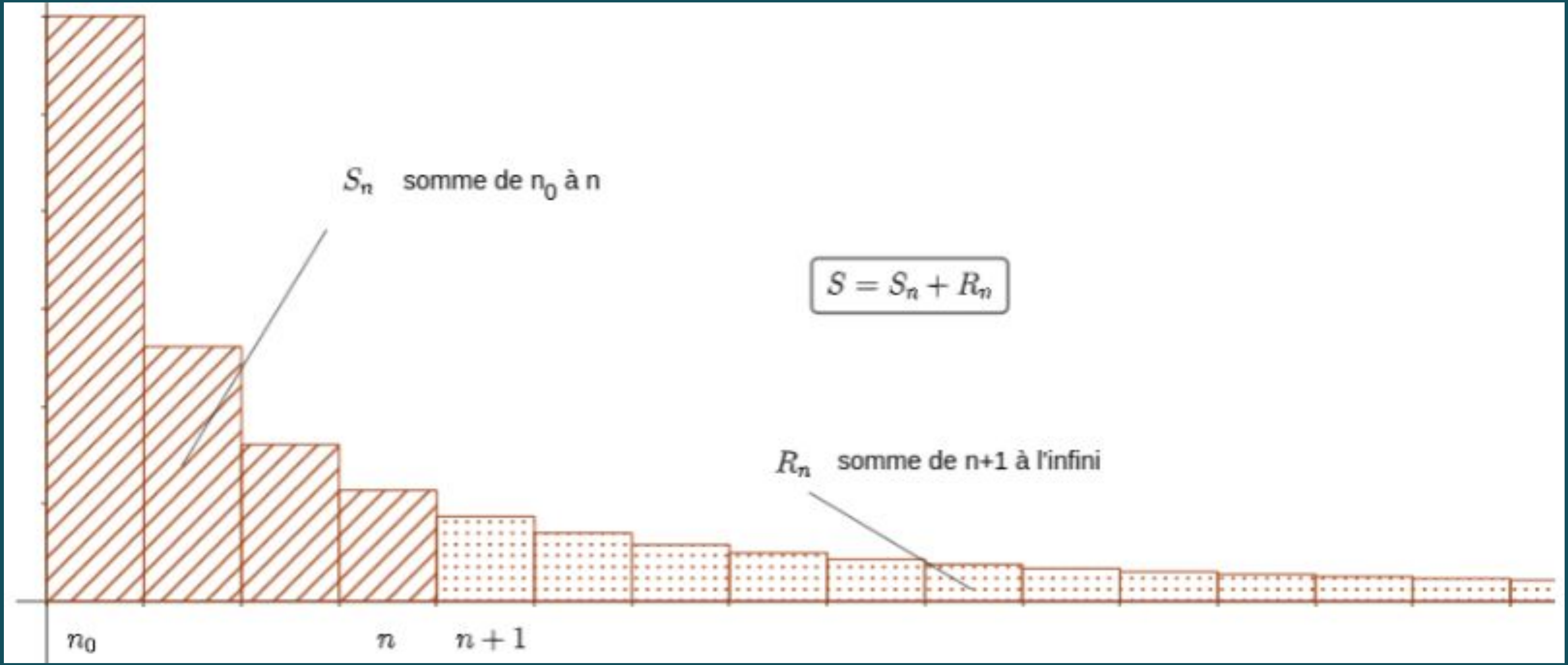
$$\textit{La série de terme général } \frac{1}{n^\alpha} \textit{ est ACV ssi } \alpha > 1$$

remarque 6 (*à propos des séries de Riemann*)

	$\alpha < 0$	$\alpha = 0$	$0 < \alpha \leqslant 1$	$1 < \alpha$
$\lim \frac{1}{n^\alpha}$	$+\infty$	1	0	0
$\sum \frac{1}{n^\alpha}$	GDV (et DV)	GDV (et DV)	DV (pas GDV)	ACV (et CV)

iii) $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ *N'est PAS une série de Riemann! (car* $(-1)^n$ *n'est pas une constante)*

1.7 approximation de la somme d'un série convergente

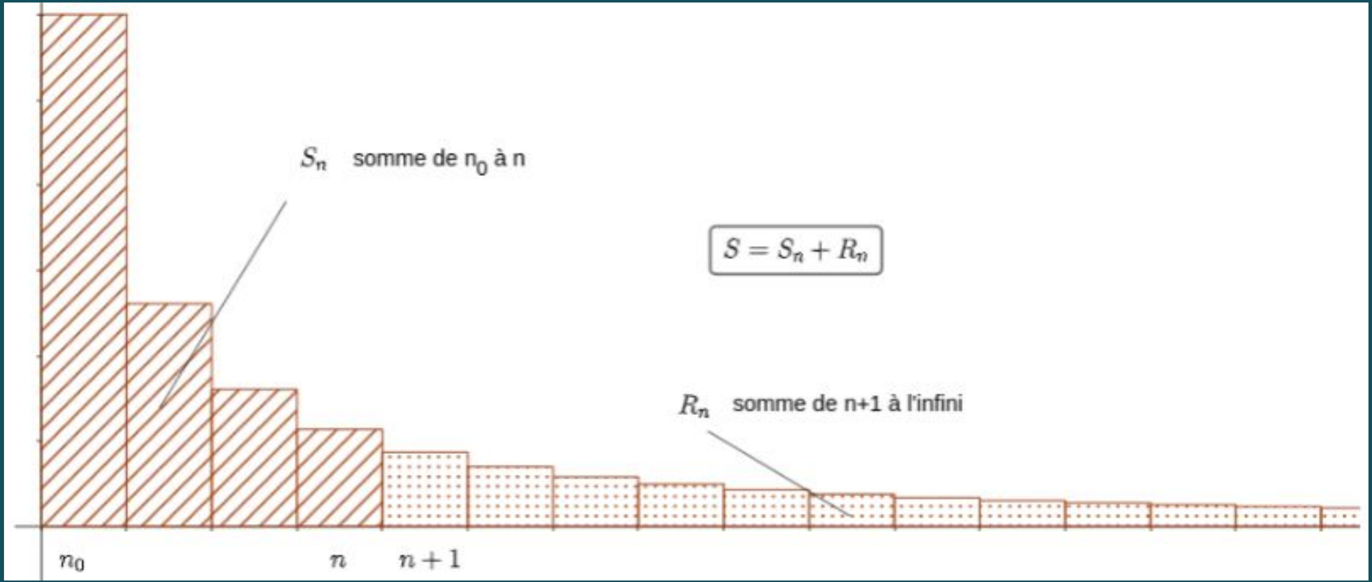


définition 5: reste

Lorsque $\sum u_n$ est une série convergente, de somme S, on appelle reste d'ordre d'ordre n la différence

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots$$

On encadre R_n (ou on majore $|R_n|$) pour estimer l'erreur commise sur l'approximation



1.8 Somme de séries numériques

théorème 7: linéarité de la somme pour les séries convergentes

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries

i.) si $\sum u_n$ CV et $\sum v_n$ CV alors $\sum u_n + v_n$ CV, et l'on a $\boxed{\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n + v_n = \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} v_n}$

ii.) si $\sum u_n$ DV et $\sum v_n$ CV alors $\sum u_n + v_n$ DV

iii.) si $\sum u_n$ DV et $\sum v_n$ DV alors pas de conclusion directe quant à la convergence de $\sum u_n + v_n$

iv.) si $\sum u_n$ CV alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, la série $\sum \lambda u_n$ CV et l'on a $\boxed{\sum_{n=n_0}^{\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n}$

v.) si $\sum u_n$ DV alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ non nul, la série $\sum \lambda u_n$ DV

exemple 6:

- on peut affirmer que la série $\sum \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n}$ est divergente
  car c'est la somme d'une série convergente $\left(\sum \frac{2}{n^2}\right)$ et d'une série divergente $\left(\sum \frac{3}{n}\right)$
- on sait que les deux séries $\sum \frac{-1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ sont divergentes, mais la série $\sum \frac{-1}{n} + \frac{1}{n}$ est convergente!

2 Séries à termes positifs

tg positif $\Leftrightarrow$ (S_n) croissante

exemple 7:

- La série $\sum \frac{1}{n}$ est une série dont le terme général est positif (c'est $\frac{1}{n} > 0$)
- On sait que cette série est une série divergente.

  On peut donc $\boxed{\text{affirmer}}$ que la suite de ses sommes partielles tend vers +
- On vient de montrer que $\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=+\infty}$

théorème 9:

Soit $\sum u_n$ une série de terme général u_n POSITIF

1. La série $\sum u_n$ converge **ssi** la suite de ses sommes partielles (S_n) est majorée
2. la série $\sum u_n$ diverge **ssi** $\lim S_n = +\infty$ (càd les sommes partielles tendent vers $+\infty$)

théorème 10: théorème de comparaison par majoration

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries telles que pour n suffisamment grand, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

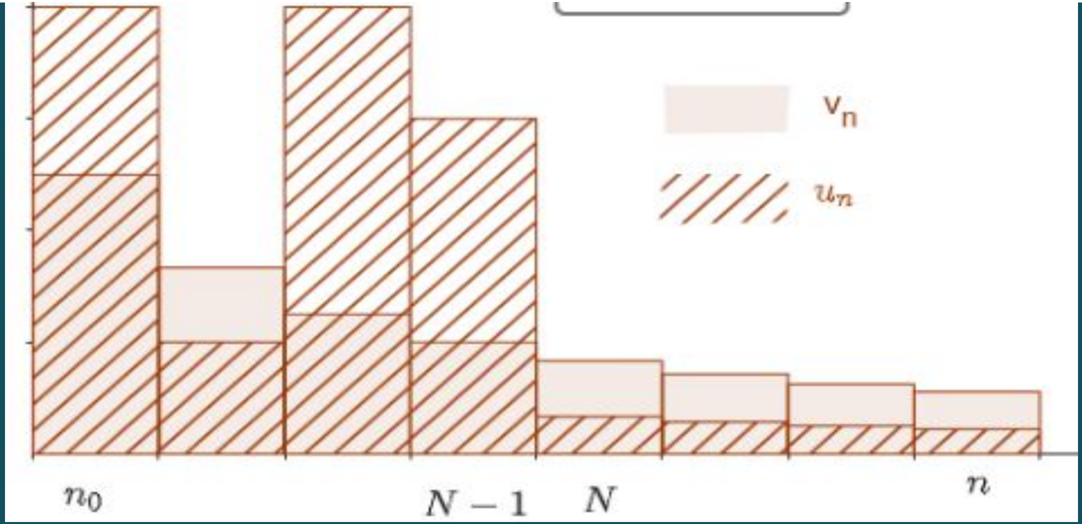
i) **Si** $\sum v_n$ converge **alors** $\sum u_n$ converge.

ii) **Si** $\sum u_n$ diverge **alors** $\sum v_n$ diverge

ce qui s'écrit encore:

i) $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge

ii) $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge



à partir du rang N on a $u_n \leqslant v_n$

et donc pour tout n on a $\boxed{\sum_{k=N}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=N}^{n} v_k}$

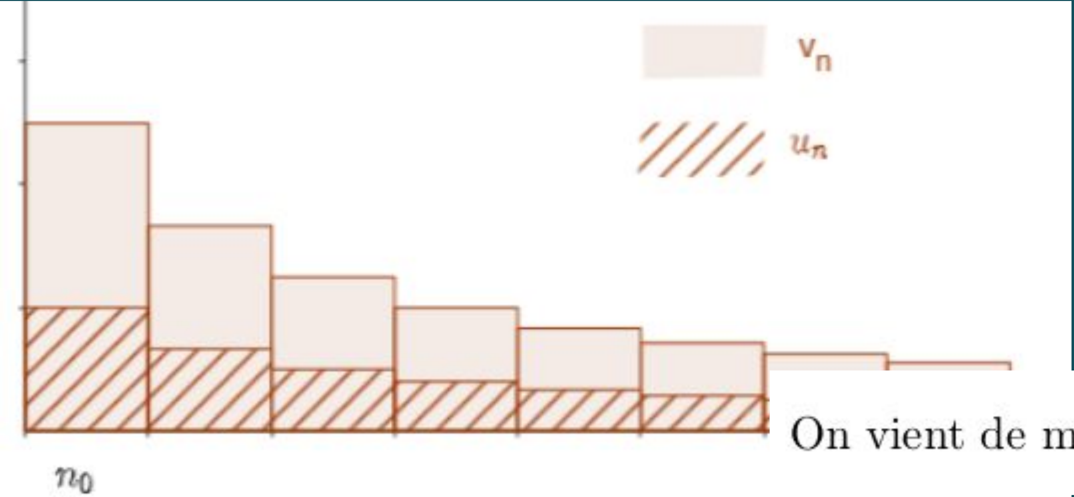
on peut supposer que $\forall n \geqslant n_0, 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$

- Notons S_n [resp. T_n] la somme partielle d'indice n de la série $\sum u_n$ [resp. $\sum v_n$]

- Comme les séries sont de terme général positif, on peut affirmer que $\boxed{\text{les suites des sommes partielles } (S_n) \text{ et } (T_n) \text{ sont deux suites croissantes}}$

1. **Montrons une inégalité entre S_n et T_n.**

Soit $n \geqslant n_0$



pour tout $k \in [\![n_0, n]\!]$ on a $0 \leqslant u_k \leqslant v_k$

on a par sommation

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} v_k$$

On vient de montrer que $\boxed{\forall n \geqslant n_0, S_n \leqslant T_n}$

2. **Montrons que $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge**

théorème 9:

Soit $\sum u_n$ une série de terme général u_n POSITIF

1. La série $\sum u_n$ converge **ssi** la suite de ses sommes partielles (S_n) est majorée
2. la série $\sum u_n$ diverge **ssi** $\lim S_n = +\infty$ (càd les sommes partielles tendent vers $+\infty$)

Par transitivité de la relation $\leqslant$ on en déduit que $\forall n \geqslant n_0, S_n \leqslant M$

On vient d'établir que la suite (S_n) est majorée.

Comme la suite (S_n) est croissante et majorée,

elle est

On vient de montrer que $\boxed{\forall n \geqslant n_0, S_n \leqslant T_n}$

théorème 11: Règle des équivalents

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries telles que $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n$ et v_n positif pour n assez grand.

Alors , les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

On rappelle que <u>*de même nature*</u> *signifie que les séries sont simultanément convergentes ou simultanément divergentes.*

ou bien v_n négatif pour n assez grand

ou bien v_n de SIGNE STABLE pour n assez grand

2.2 comparaison avec une série géométrique

théorème 12: règle de D'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série telle que $\lim\limits_{\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ existe.

Alors :

i. si $l > 1$ alors $\sum u_n$ GDV

ii. si $l < 1$ alors $\sum u_n$ ACV (en particulier $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$)

iii. si $l = 1$ alors pas de conclusion quant à la nature de la série

rem: Attention ! Il n'y a pas de réciproque à la règle de D'Alembert...

exemple 8: les exemples typiques

Déterminons la nature des séries suivantes $\sum \dfrac{n!}{n^n}$ et $\sum \dfrac{z^n}{n!}$

3 Convergence absolue - suite sommable

définition 7: convergence absolue, complément à la définition $\boxed{4}$

On dit que <u>la série $\sum u_n$ est absolument convergente (AVC)</u>, ou encore que <u>la suite (u_n) est sommable</u> lorsque la série de terme général $|u_n|$ converge, càd lorsque $\sum |u_n|$ converge.

Dans ce cas, on peut noter $\sum_{n=n_0}^{\infty} |u_n| < +\infty$ et $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ est appelée <u>somme de la suite</u>

rem: la notion de convergence absolue est liée à une série, la notion de sommabilité est liée à une suite

exemple 10:

On sait que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série (absolument) convergente et que sa somme vaut $\frac{\pi^2}{6}$.

On pourrait dire de manière équivalente que *la suite* $(\frac{1}{n^2})_{n\geqslant 1}$ *est sommable et que sa somme vaut* $\frac{\pi^2}{6}$

SIGNE NON STABLE
FATAL ERROR

Déterminer ... $\frac{n}{\;+1} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n$

- On a $u_n \sim \left(\frac{\;}{2}\right) \; = v_n$

pour

Règle Des Equivalents

théorème 15: théorèmes de comparaison

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques

1. **comparaison avec les inégalités:**

   Si $\begin{cases} |u_n| \leqslant |v_n| \text{à partir d'un certain rang} \\ \sum v_n \text{est ACV} \end{cases}$ alors $\sum u_n$ est ACV

2. **comparaison avec les O:**

   Si $\begin{cases} u_n = O(v_n) \\ \sum v_n \text{est ACV} \end{cases}$ alors $\sum u_n$ est ACV

3. **comparaison avec les o:**

   Si $\begin{cases} u_n = o(v_n) \\ \sum v_n \text{est ACV} \end{cases}$ alors $\sum u_n$ est ACV

4. **comparaison avec les équivalents:**

   Si $u_n \sim v_n$ alors $\begin{cases} \text{l'absolue convergence de } \sum u_n \text{ équivaut à l'absolue convergence de } \sum v_n \\ \text{les séries } \sum |u_n| \text{ et } \sum |v_n| \text{ sont de même nature} \\ \sum u_n \text{ ACV} \iff \sum v_n \text{ ACV} \\ \sum |u_n| \text{ DV} \iff \sum |v_n| \text{ DV} \end{cases}$

rem: à chaque fois, on aurait pu écrire "(u_n) est sommable" à la place de "$\sum u_n$ ACV"

exemple 11:

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{}{n}$

- On a $u_n \sim \left(\frac{-1}{2}\right)^n = v_n$

- La série de terme général v_n est une série géométrique de raison $q = \frac{-1}{2}$ avec $|q| < 1$; la série $\sum v_n$ est donc ACV
- La règle des équivalents permet d'affirmer que la série $\sum u_n$ est ACV aussi

4. **comparaison avec les équivalents:**

$$\text{Si } u_n \sim v_n \text{ alors } \begin{cases} \text{l'absolue convergence de } \sum u_n \text{ équivaut à l'absolue convergence de } \sum v_n \\ \text{les séries } \sum |u_n| \text{ et } \sum |v_n| \text{ sont de même nature} \\ \sum u_n \text{ ACV} \iff \sum v_n \text{ ACV} \\ \sum |u_n| \text{ DV} \iff \sum |v_n| \text{ DV} \end{cases}$$

5 Séries alternées

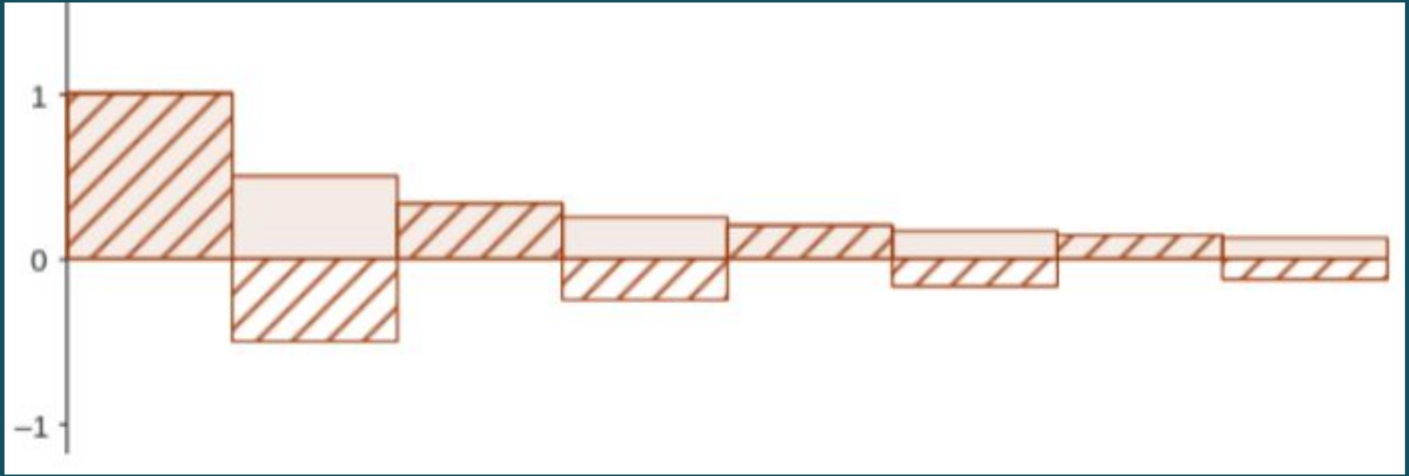
définition 8: série alternée

On appelle <u>série alternée</u> toute série $\sum u_n$ telle que pour tout n, $u_n.u_{n+1} < 0$

rem: le terme général d'une série alternée se présente sous la forme $(-1)^n.v_n$ ou $(-1)^{n+1}.v_n$ avec (v_n) suite positive

exemple 13: parmi les séries suivantes, lesquelles sont des séries alternées?

$$\sum(-1)^n.\frac{\cos n}{n^2} \qquad \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad \sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^{n+1}}{n\ln n} \qquad \sum\frac{(-1)^{n+1}}{2^{3n-4}} \qquad \sum(-1)^n\arcsin(\frac{1}{n})$$



théorème 17: critère spécial de convergence des séries alternées

Soit $\sum u_n$ une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroit et tend vers zéro.

Alors :

i.) la série $\sum u_n$ est une série convergente

ii.) pour tout entier n, la somme de la série est comprise entre deux sommes partielles consécutives, S_n et S_{n+1}

iii.) pour tout entier n, le reste d'ordre n, R_n est du même signe que u_{n+1}

iv.) pour tout entier n, $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$

(on note que cette série n'est pas ACV)

- *Cette série est clairement une série alternée*
- *La suite $(|u_n|)$ est clairement décroissante et tend vers zéro.*

D'après le CSCSA on peut affirmer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ *est convergente.*

théorème 17: critère spécial de convergence des séries alternées

Soit $\sum u_n$ une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroit et tend vers zéro.

Alors :

i.) la série $\sum u_n$ est une série convergente

exemple 14: la série harmonique alternée

On s'intéresse à la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

théorème 17: critère spécial de convergence des séries alternées

Soit $\sum u_n$ une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroit et tend vers zéro.
Alors :

i.) la série $\sum u_n$ est une série convergente

ii.) pour tout entier n, la somme de la série est comprise entre deux sommes partielles consécutives, S_n et S_{n+1}

iii.) pour tout entier n, le reste d'ordre n, R_n est du même signe que u_{n+1}

iv.) pour tout entier n, $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$

- *On a* $S_1 = -1, S_2 = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ *et* $S_3 = S_2 - \frac{1}{3} = -\frac{5}{6}$
  On a ainsi
  $$-\frac{5}{6} \leqslant S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \leqslant -\frac{1}{2}$$
- *On a* $|R_n| \leqslant |u_{n+1}| = \frac{1}{n+1}$.
  Pour obtenir une v.a. de S *à* 10^{-2} *près, il suffit donc de choisir* n *tel que* $\frac{1}{n+1} \leqslant 10^{-2}$, *càd* $n \geqslant 99$.
  Ainsi S_{99} *est une v.a. de* S *à* 10^{-2} *près*
- *Comme* $sg(R_{99}) = sg(u_{100}) > 0$, *on en déduit que*

$$\boxed{S_{99} \text{ est une v.a. par défaut à } 10^{-2} \text{ près}}$$

démonstration du critère spécial des séries alternées

On considère une série alternée $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

On se place dans le cas où les termes d'indices pairs[impairs] sont positifs[négatifs]

On a donc $\forall n \geqslant 0, u_n = (-1).|u_n|$

On suppose que la suite $(|u_n|)$ est décroissante et tend vers 0.

- On note pour tout $n \in \mathbb{N}$
  - $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la somme partielle d'indice n
  - $T_n = S_{2n}$
  - $W_n = S_{2n+1}$

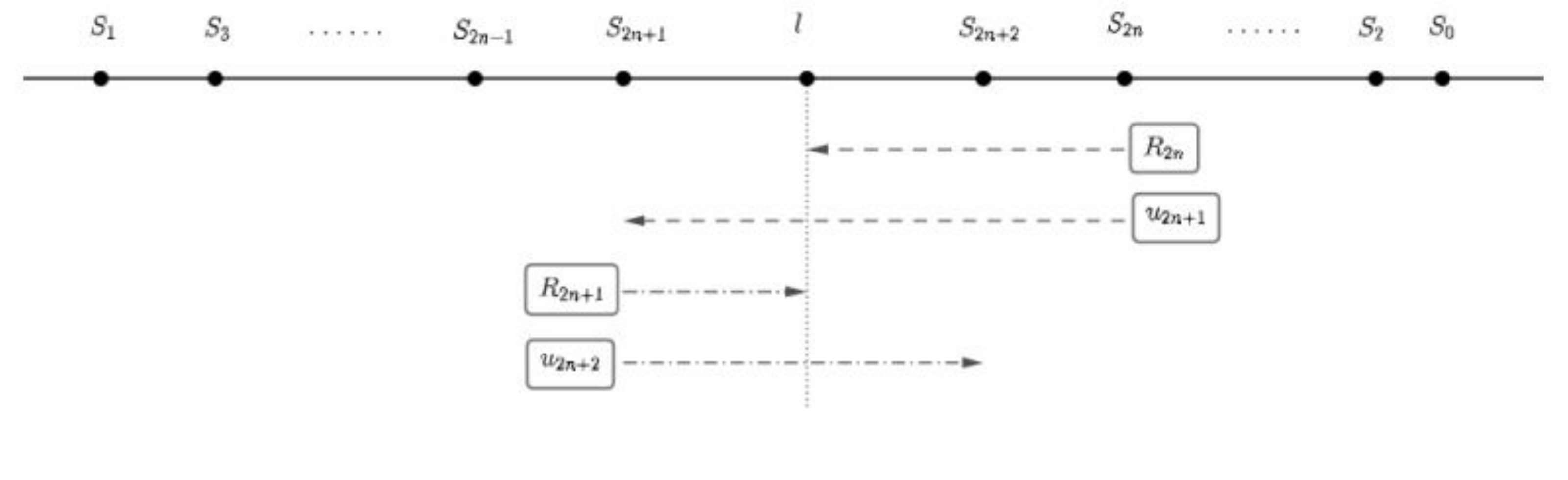
1. On montre que les suites (T_n) et (W_n) sont deux suites adjacentes
   (en classe)
2. On montre que (S_n) est une suite convergente
   (a) Comme les suites (T_n) et (W_n) sont adjacentes, on sait d'après le théorème sur les suites adjacentes(théorème 18 du poly "suites numériques") que ces deux suites convergent vers une même limite l
   (b) On sait maintenant que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers une même limite.
   On sait alors que l'on peut affirmer (grâce au théorème 3 du poly "suites numériques") que la suite (S_n) converge vers cette limite l

théorème 17: critère spécial de convergence des séries alternées

Soit $\sum u_n$ une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroit et tend vers zéro.

Alors :

- i.) la série $\sum u_n$ est une série convergente
- ii.) pour tout entier n, la somme de la série est comprise entre deux sommes partielles consécutives, S_n et S_{n+1}
- iii.) pour tout entier n, le reste d'ordre n, R_n est du même signe que u_{n+1}
- iv.) pour tout entier n, $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$



2.3 comparaison avec une intégrale

exemple 9:

Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n.\ln n}$ est divergente.

Solution:

- Notons $\boxed{\begin{array}{rcl} f:]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{t.\ln t} \end{array}}$

  La fonction f est dérivable sur $]1,+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas. On a $\forall t > 0, f'(t) = -\dfrac{1+\ln t}{t^2.\ln^2 t}$

- Sur l'intervalle $[2,+\infty[$, la fonction f est continue et décroissante.
  On peut donc affirmer grâce au théorème précédent que:

$$\text{La série } \sum f(n) \text{ converge} \iff \lim_{x\to+\infty} \int_2^x f(t)dt \text{ existe et est finie}$$

  Or $\displaystyle\int_2^x f(t)dt = \int_2^x \frac{1}{t.\ln(t)}dt = [\ln|\ln t|]_2^x \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$

  On en déduit que $\sum \dfrac{1}{n.\ln n}$ est une série divergente

théorème 14: comparaison série intégrale - méthode des rectangles

Soit f une fonction définie et continue sur $[n_0, +\infty[$. ($n_0 \in \mathbb{N}$ fixé).

On note $S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} f(k)$

1. Si f est décroissante sur $[n_0, +\infty[$ alors

$$\text{pour tout } n \geqslant n_0 \text{ on a } \int_{n_0}^{n+1} f(t)dt \leqslant S_n \leqslant f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f(t)dt$$

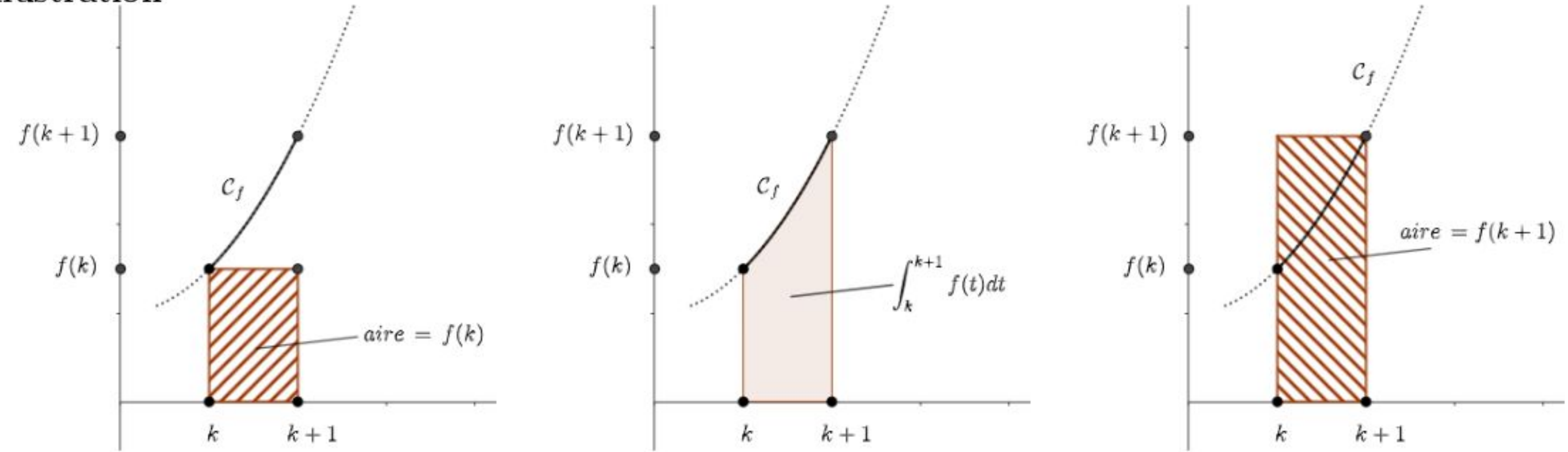
2. Si f est croissante sur $[n_0, +\infty[$ alors

$$\text{pour tout } n \geqslant n_0 \text{ on a } \int_{n_0}^{n+1} f(t)dt \geqslant S_n \geqslant f(n_0) + \int_{n_0}^{n} f(t)dt$$

3. Si f est décroissante sur $[n_0, +\infty[$ et que la série converge de tg $f(n)$ alors

$$\text{pour tout } n \geqslant n_0 \text{ on a } \int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leqslant R_n \leqslant \int_{n}^{+\infty} f(t)dt$$

- **illustration**

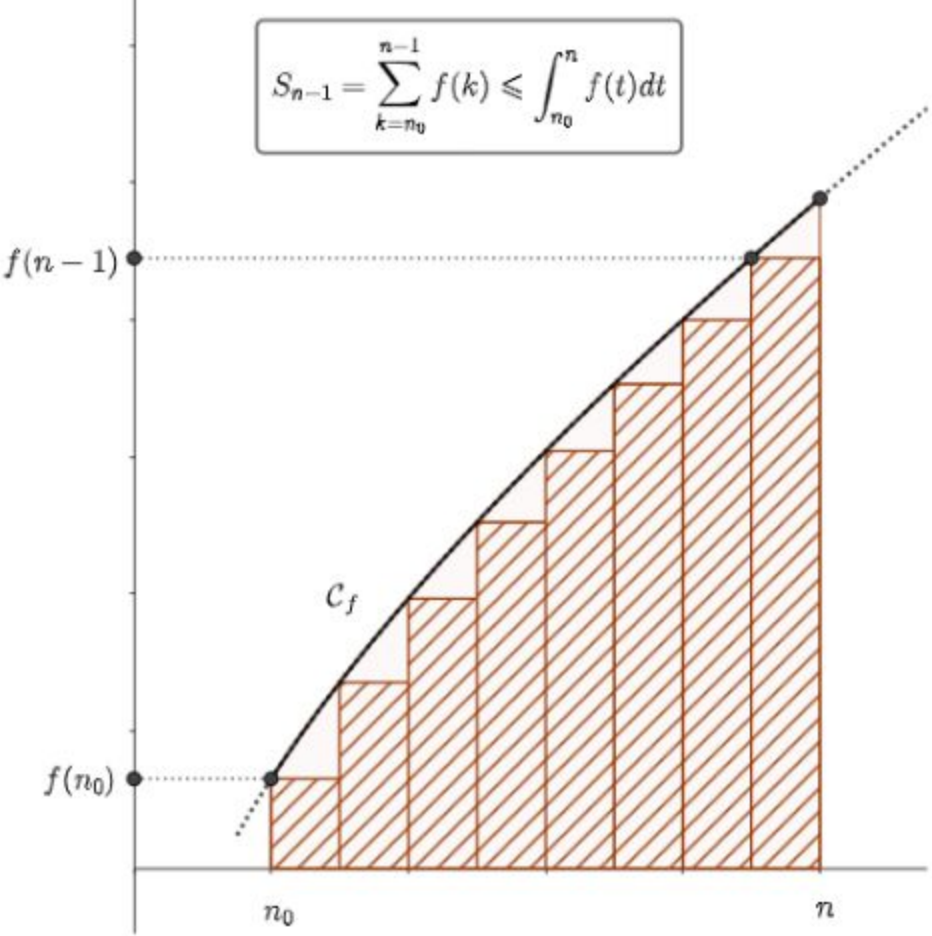


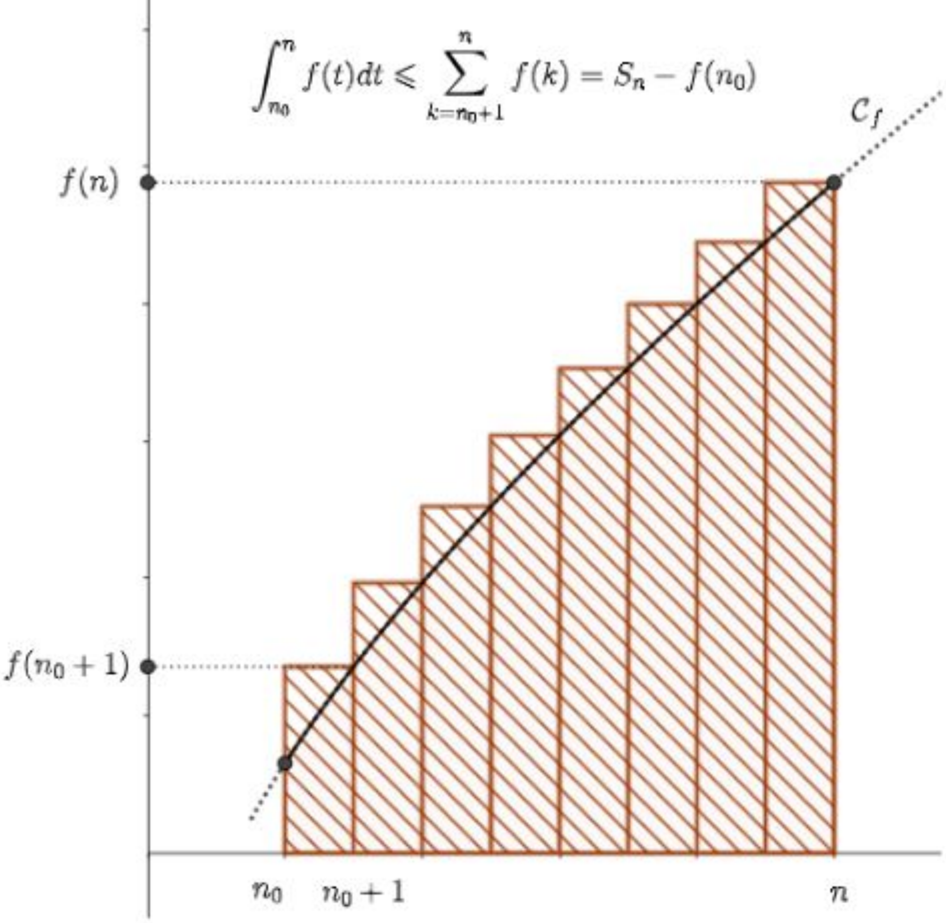
- **Raisonnement dans le cas d'une fx croissante:**
  Si f est croissante sur $[k,k+1]$, on a

$$\forall t \in [k,k+1], f(k) \leqslant f(t) \leqslant f(k+1)$$

  et par croissance de l'intégrale

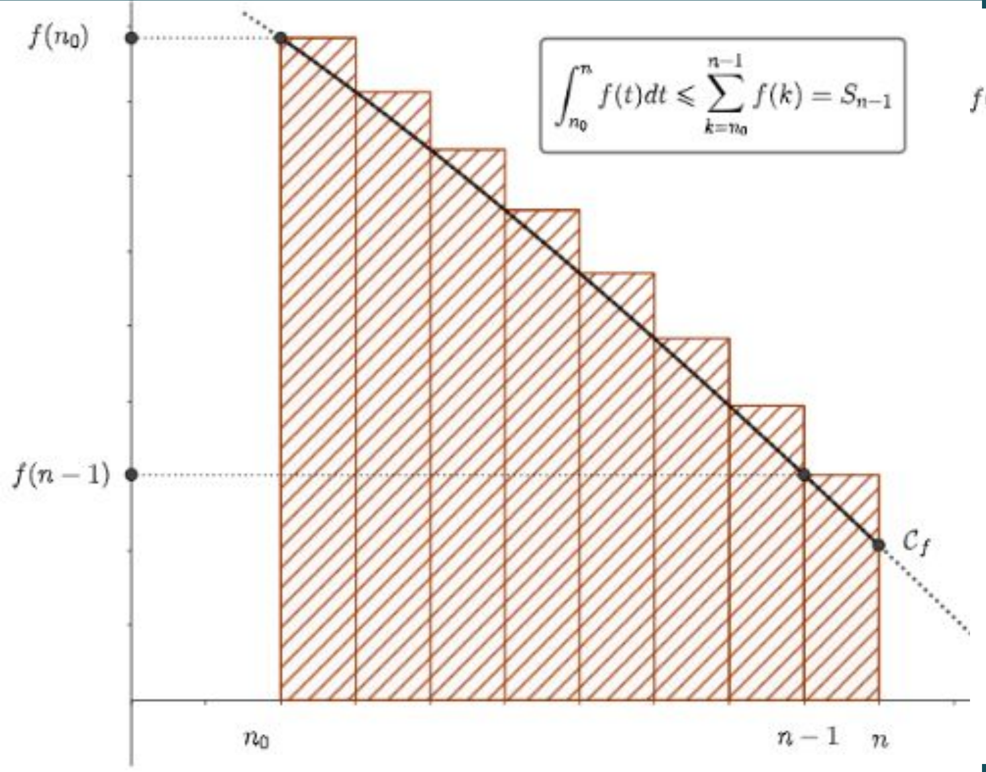
$$\underbrace{\int_k^{k+1} f(k)dt}_{=f(k)} \leqslant \int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant \underbrace{\int_k^{k+1} f(k+1)dt}_{=f(k+1)}$$

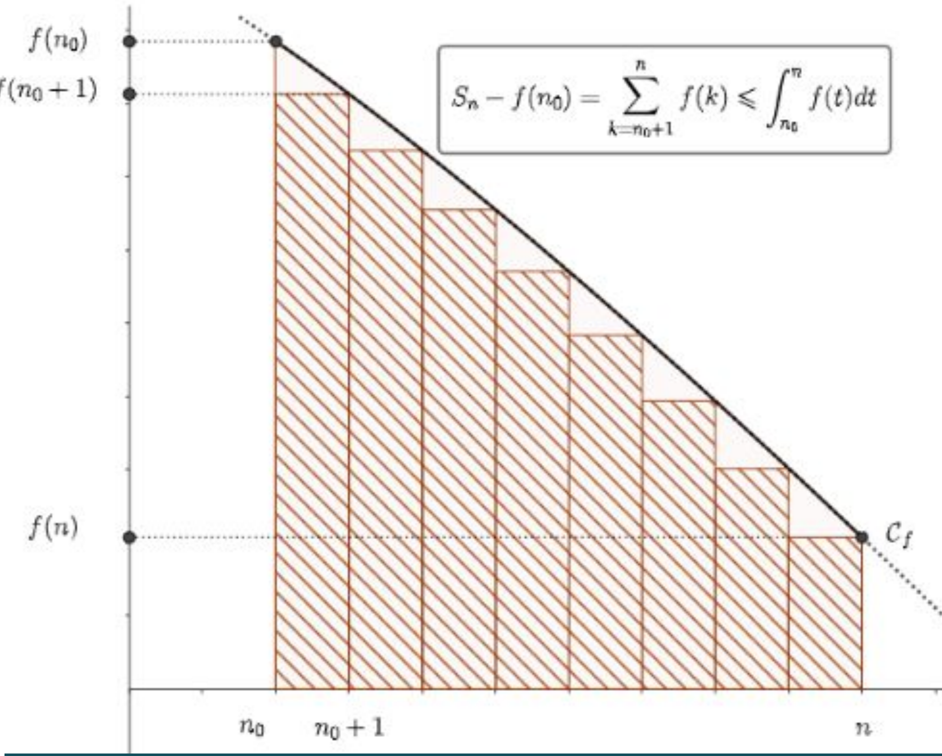




- **dessin global dans le cas d'une fonction croissante:**

- **dessin global dans le cas d'une fonction décroissante:**





2.2 comparaison avec une série géométrique

théorème 12: règle de D'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série telle que $\lim\limits_{\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ existe.

Alors :

i. si $l > 1$ alors $\sum u_n$ GDV

ii. si $l < 1$ alors $\sum u_n$ ACV (en particulier $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$)

iii. si $l = 1$ alors pas de conclusion quant à la nature de la série

démonstration:

l'idée consiste à dire que

- *si l'on avait* $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = 0.8$ *alors* $(|u_n|)$ *serait une suite géométrique de raison* 0.8.
- *si* $\lim \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = l < 0.8$ *alors* $(|u_n|)$ *est majorée par une suite géométrique de raison 0.8*

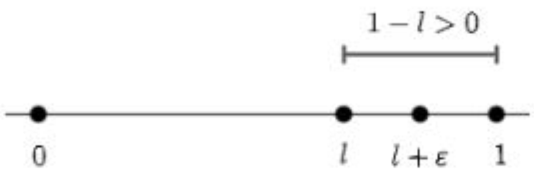
$\boxed{\text{cas } l < 1}$

1. **On écrit la définition de la limite avec les ε**

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \left| \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} - l \right| \leqslant \varepsilon \qquad \text{càd} \qquad \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, l - \varepsilon \leqslant \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leqslant l + \varepsilon$$

2. **On choisit judicieusement ε pour avoir une raison $l + \varepsilon < 1$**

Comme $l < 1$, il est possible de choisir $\varepsilon > 0$ tel que $l + \varepsilon < 1$.



Par exemple, on prend $\varepsilon = \dfrac{1-l}{2}$, on a alors $\begin{cases} \varepsilon = \frac{1-l}{2} > 0 \\ l + \varepsilon = \frac{1+l}{2} < 1 \end{cases}$

3. **On en déduit la suite géométrique majorante**

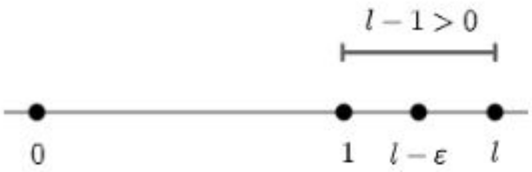
On montre en classe que $\forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant (l+\varepsilon)^{n-N}.u_N$

4. **On conclut que $\sum |u_n|$ CV grâce au théorème $\boxed{10}$**

$\boxed{\text{cas } l > 1}$

1. **On écrit la définition de la limite avec les ε**

2. **On choisit judicieusement ε pour avoir $l - \varepsilon \geqslant 1$**



Par exemple, on prend $\varepsilon = l - 1$

3. **On en déduit que $\forall n \geqslant N, |u_n| \geqslant |u_N|$ et donc que $\sum |u_n|$ est GDV**

$\boxed{\text{cas } l = 1}$

Donner 2 exemples

4 Produit de Cauchy de deux séries numériques

Q: Est-il possible de définir le produit de deux séries?

théorème 16: Produit de Cauchy

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes.

On note $w_n = \sum\limits_{p+q=n} u_p v_q = \sum\limits_{p=0}^{n} u_p v_{n-p} = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots u_{n-1} v_1 + u_n v_0$ pour tout $n \geqslant 0$

Alors la série de terme général w_n est absolument convergente et $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = (\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n)(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n)}$

rem: on notera que l'on n'a pas $(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n)(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n . v_n$

rem: la formule du produit de Cauchy de deux séries numériques évoque la formule du produit de deux polynômes

exemple 12: produit de Cauchy et fonction exponentielle

1. Montrer que pour tout complexe z, la série de terme général $\dfrac{z^n}{n!}$ est convergente.

   On rappelle que par définition on note $\boxed{\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \text{ pour tout } z \text{ complexe}}$

2. Retrouver avec cette expression de $\exp(z)$ que $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$