

2. LEY DE GAUSS. CONDUCTORES EN EQUILIBRIO

CAMPO ELÉCTRICO

1. Ley de Gauss para el campo eléctrico
2. Conductores en equilibrio electrostático
3. Otras aplicaciones de Gauss

Ejercicios relacionados: 21-25, 27-29

1. LEY DE GAUSS PARA EL C. ELÉCTRICO

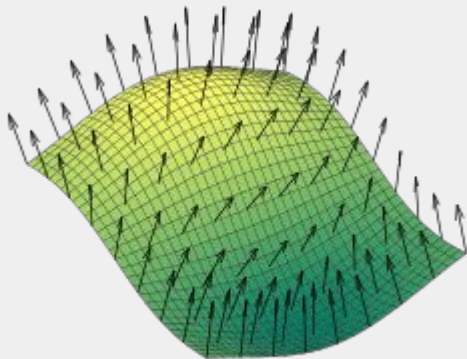
Recordemos (del tema de Interacción Gravitatoria):

Magnitud FLUJO, Φ , cuyas unidades son los Weber [Wb]. En este caso, campo eléctrico.

Como definición elemental, teníamos que: $d\Phi = \vec{C} \cdot d\vec{S}$

Entonces para el campo eléctrico: $d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$

Recordamos que el vector superficie tiene:



- de MÓDULO, el valor de la superficie que representa
- de DIRECCIÓN, perpendicular a la superficie en cada punto
- de SENTIDO, hacia fuera para superficies CERRADAS

1. LEY DE GAUSS PARA EL C. ELÉCTRICO

Ley de Gauss para el campo Eléctrico:

El flujo total del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a

$$\Phi_T = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i$$

donde q_i son todas las cargas **INTERIORES** a la superficie cerrada

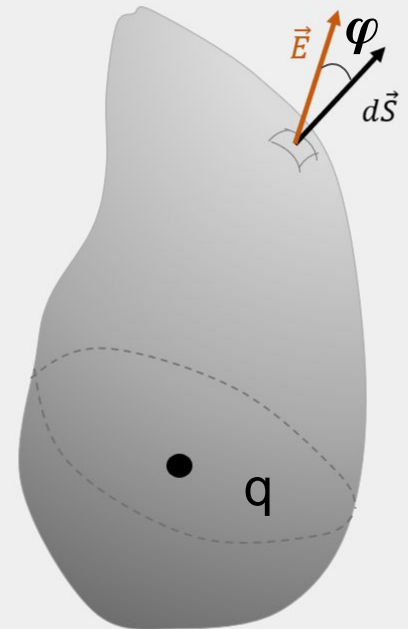
Demostración:



¡demostración!

Tomemos una superficie CUALQUIERA con una carga situada en su INTERIOR, en cualquier posición.

La carga q creará, en cualquier punto de su superficie, un campo E , que formará ángulos diversos con el vector superficie en cada punto, por lo que el cálculo del flujo mediante ese producto escalar será DIFÍCIL, por lo que tomaremos otra vía.



1. LEY DE GAUSS PARA EL C. ELÉCTRICO

Ley de Gauss para el campo eléctrico (continúa demostración):

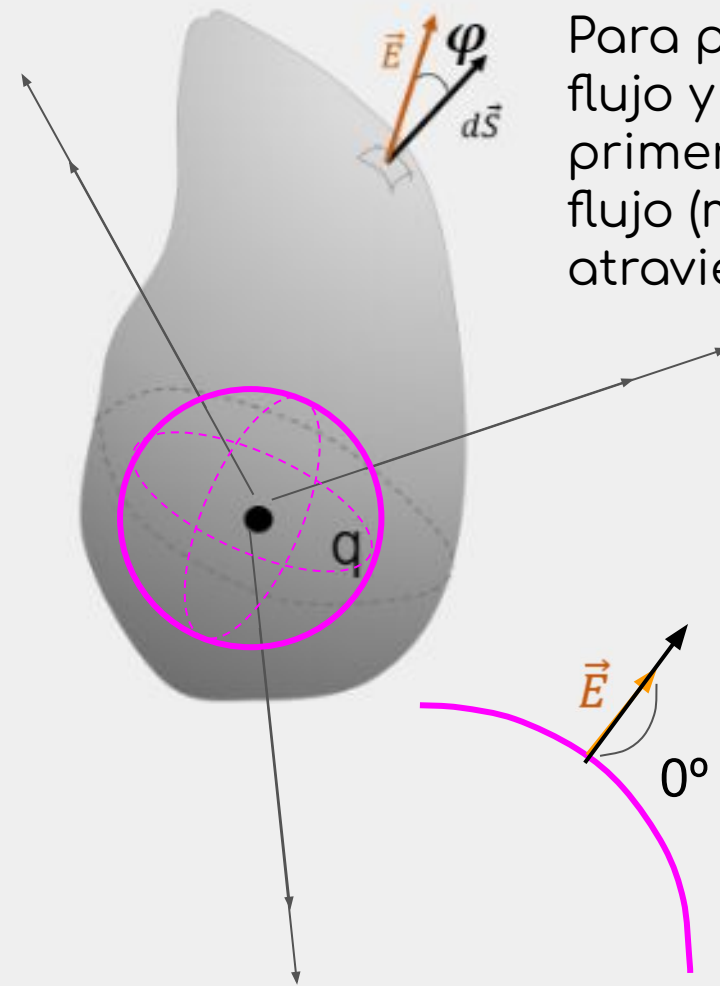
Para poder calcular el flujo, pensamos en QUÉ ES el flujo y vemos que cualquier superficie interior a la primera que CONTENGA a la carga, tendrá el mismo flujo (mismo número de líneas de campo) que la atraviesa.

Entonces tomaremos una esfera centrada en la carga, de radio r_0 .

En su superficie, el vector campo E_0 tendrá un valor constante (pues r_0 es constante) y será siempre alineado al vector superficie (que será radial).

Por lo tanto, y para superficie diferencial, el flujo será:

$$d\Phi_0 = E dS_0$$



1. LEY DE GAUSS PARA EL C. ELÉCTRICO

Ley de Gauss para el campo eléctrico (continúa demostración):

Para hallar el flujo a través de toda la esfera, tendremos que realizar una INTEGRAL DE SUPERFICIE (o integral doble) en la esfera S_0 .

$$\Phi_0 = \iint_{S_0} E_0 dS_0 = \frac{Kq}{r_0^2} \iint_{S_0} dS_0 = \frac{Kq}{r_0^2} S_0 = \frac{Kq}{r_0^2} 4\pi r_0^2 = 4\pi Kq$$

E_0 es cte, sacamos fuera de la integral

Superficie de una esfera

El resultado ahora de la integral es la propia superficie

Recordamos:

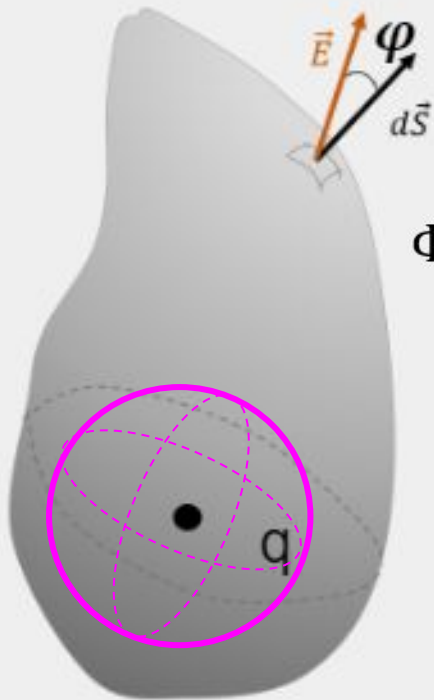
$$K_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\Phi = \Phi_0 = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

Por lo tanto el flujo total creado por la carga será:

Y por superposición, si hubiera más cargas en el interior de la superficie inicial

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i$$



2. CONDUCTORES EN EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO

¿QUÉ ES UN CONDUCTOR CARGADO EN EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO?

- ➡ **CONDUCTOR** Cuerpo caracterizado por tener cargas eléctricas que pueden moverse libremente por él (electrones o iones)
- ➡ **EN EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO** significa que las cargas no tienen un DESPLAZAMIENTO NETO (no tiene por qué ser un reposo absoluto)
- ➡ **CARGADO** significa que tiene más (carga negativa) o menos (carga positiva) electrones que cargas positivas

VAMOS A REALIZAR UNA SERIE DE AFIRMACIONES PARA LOS CONDUCTORES EN EQUILIBRIO Y DEMOSTRARLAS A TRAVÉS DEL TEOREMA DE GAUSS, AFIRMACIONES QUE NOS SERÁN ÚTILES PARA OBTENER EXPRESIONES DE TRABAJO

2. CONDUCTORES EN EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO

AFIRMACIONES PARA LOS CONDUCTORES EN EQUILIBRIO.

1. CAMPO

1.El campo eléctrico es:

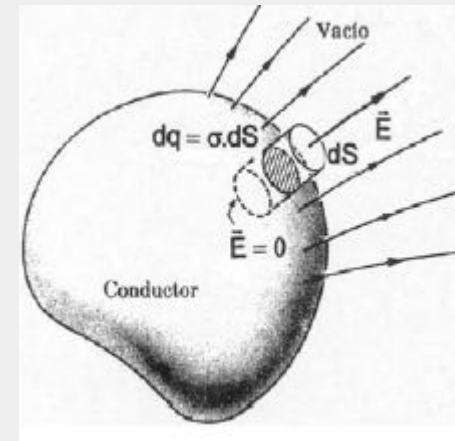
- a) Nulo en su interior
- b) Perpendicular a la superficie en su superficie,
- c) En la superficie, el módulo del campo vale:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Demostración 1a): Si no fuera nulo en su interior, habría un desplazamiento neto de las cargas en la superficie, por lo que no estaría en equilibrio.

Demostración 1b): Si no fuera perpendicular en la superficie, la componente tangencial provocaría un desplazamiento neto de las cargas en la superficie, por lo que no estaría en equilibrio.

Demostración 1c): Tomaremos una SUPERFICIE GAUSSIANA cilíndrica que atraviesa la superficie del conductor, y calcularemos el flujo que la atraviesa, de dos maneras: superficie a superficie, por un lado, y a través del teorema de Gauss, por otro.



2. CONDUCTORES EN EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO

(Continúa Demostración 1c):

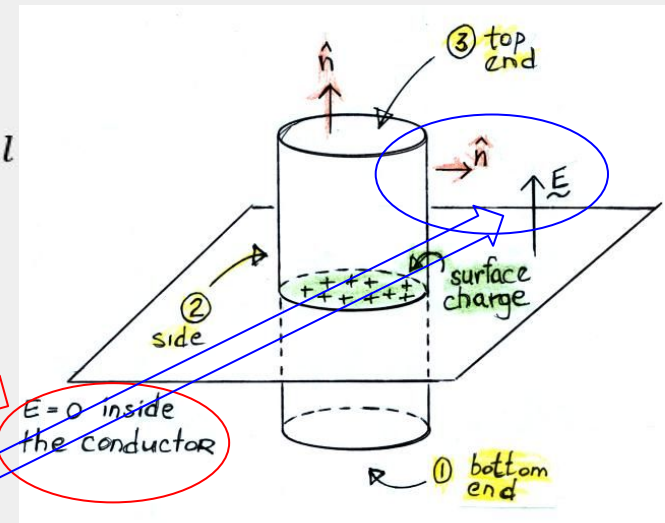
Cálculo del flujo superficie a superficie

$$\Phi_{\text{Total}} = \Phi_{\text{tapa interior}} + \Phi_{\text{tapa exterior}} + \Phi_{\text{sup lateral}}$$

$\Phi_{\text{tapa interior}}$ es CERO, pues el campo en el interior es nulo.

$\Phi_{\text{sup lateral}}$ es CERO, pues el campo es PERPENDICULAR al vector superficie en el lateral del cilindro

$\Phi_{\text{tapa exterior}}$ es el producto escalar entre el campo E y la superficie dS (que son paralelos)



Por lo tanto el flujo total, calculado superficie a superficie, valdrá: $\Phi_{\text{Total}} = EdS$

2. CONDUCTORES EN EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO

(Continúa Demostración 1c):

Cálculo del flujo por el teorema de Gauss

Para realizar este cálculo definiremos una nueva magnitud, la DENSIDAD DE CARGA SUPERFICIAL

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \left[\frac{C}{m^2} \right]$$

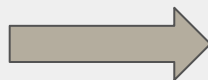
Por lo tanto la carga “atrapada” por la superficie cilíndrica será : $q = \sigma dS$

Y por lo tanto el flujo total calculado a través del teorema de Gauss:

$$\Phi_{\text{total}} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i = \frac{1}{\epsilon_0} q = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma dS$$

Y si igualamos los dos resultados obtenidos para el flujo total, tendremos

~~$$EdS = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma dS$$~~



$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$



2. CONDUCTORES EN EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO

AFIRMACIONES PARA LOS CONDUCTORES EN EQUILIBRIO. 2. POTENCIAL

2. EL POTENCIAL ELÉCTRICO es CONSTANTE EN TODOS SUS PUNTOS INTERIORES Y EXTERIORES: ES UN VOLUMEN EQUIPOTENCIAL

Demostración 2): Tomaremos la expresión elemental del potencial:

$$dV_e = -\vec{E} d\vec{r} \left\{ \begin{array}{l} \text{En el interior, } E=0, \text{ por lo tanto } dV=0 \\ \text{En la superficie } \vec{E} \text{ y } d\vec{r} \text{ son perpendiculares y por lo tanto } dV=0 \end{array} \right\} V \text{ cte}$$



2. CONDUCTORES EN EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO

AFIRMACIONES PARA LOS CONDUCTORES EN EQUILIBRIO. 3. CARGA

3.LA CARGA DE UN CONDUCTOR ESTÁ TODA DISTRIBUIDA POR SU SUPERFICIE Y ES NULA EN SU INTERIOR

Demostración 3): Si imaginamos una SUPERFICIE GAUSSIANA S_1 interior al conductor pero infinitamente pegada a ella, y calculamos el flujo a través de ella de ambas maneras:

$$\Phi_{S_1} = \iint E dS = 0$$

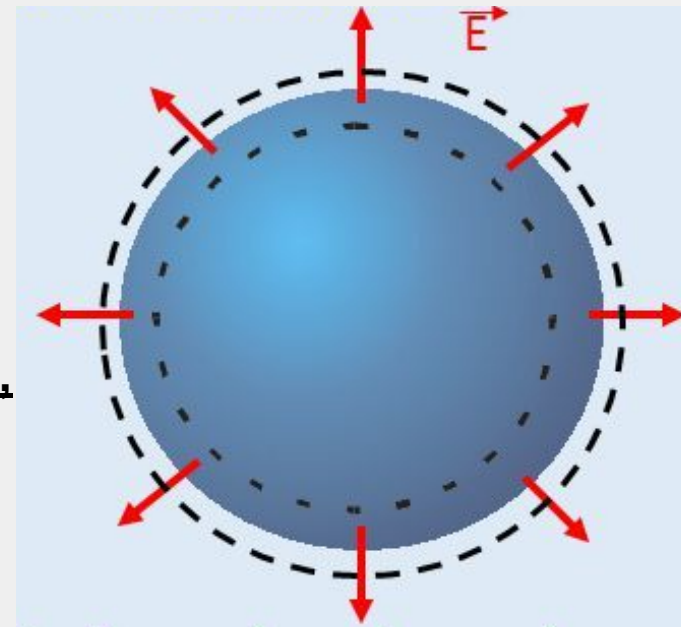
Por ser $E = 0$
en su interior

$$\sum_i q_i = 0$$

$$\Phi_{S_1} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i$$



Y en la superficie,
está repartida a
través de σ , en
función de su
GEOMETRÍA



2. CONDUCTORES EN EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO

CAPACIDAD Y ENERGÍA DE UN CONDUCTOR

Si nos preguntamos “¿Cuál es el potencial V de un conductor en equilibrio electrostático?”. La respuesta es: “Depende de la carga neta del mismo y de su forma geométrica”. Esta relación la recoge la magnitud CAPACIDAD de un conductor:

$$C = \frac{q}{V} \text{ [F] Faradios}$$

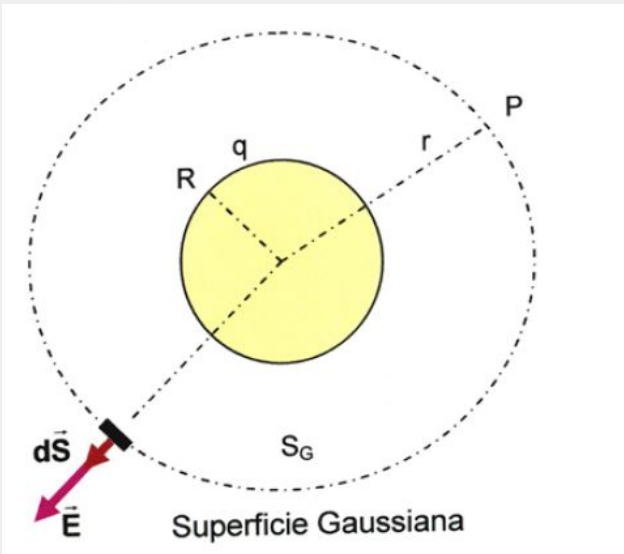
A través de esta magnitud, podemos escribir las expresiones para la ENERGÍA de un conductor cargado:

$$E_p = \frac{1}{2} qV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

3. OTRAS APLICACIONES DE LA LEY DE GAUSS - ESFERA

Utilizaremos el método de calcular el FLUJO ELÉCTRICO mediante los dos métodos (integral y Teorema de Gauss para una superficie inventada) y luego igualarlos, para hallar las expresiones de campo y potencial para diferentes formas de conductores.

ESFERA CONDUCTORA EN EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO



$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{S_1} = \iint \vec{E} d\vec{S} = \iint E dS = E \iint dS = E 4\pi r_1^2 \\ \Phi_{S_1} = \frac{1}{\epsilon_0} q \end{array} \right.$$

$$E 4\pi r_1^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q$$



$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1^2} = K_o \frac{q}{r_1^2}$$

Es decir, el CAMPO ELÉCTRICO en un radio exterior r de una esfera conductora cargada es IGUAL al que tendríamos si toda la carga estuviera CONCENTRADA en el centro de esa esfera.

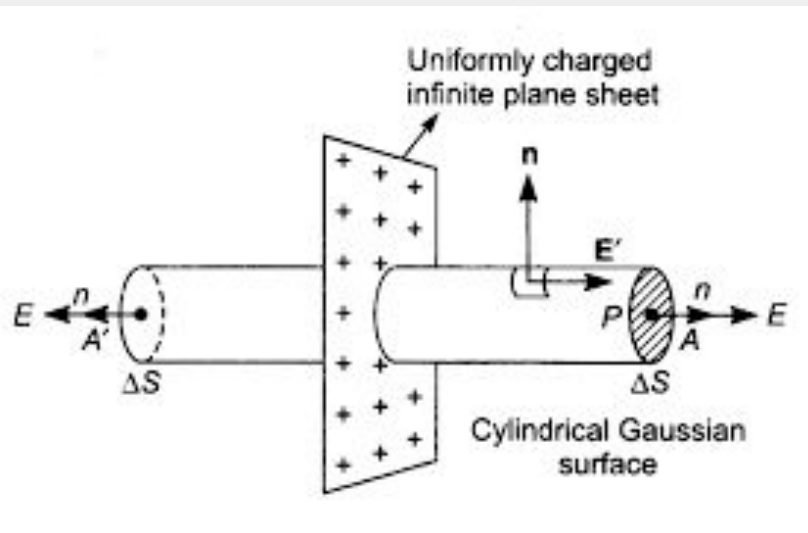
Se puede demostrar que igualmente, el potencial será:

$$V = K_o \frac{q}{r_1}$$

3. OTRAS APLICACIONES DE LA LEY DE GAUSS - PLACA

PLACA CONDUCTORA EN EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO

Vamos a considerar una placa INFINITA (= estamos muy cerca de ella y su centro), cargada de manera HOMOGÉNEA con una densidad de carga σ POSITIVA



Vamos a calcular el campo eléctrico a una distancia r de la placa. Utilizaremos para ello una **SUPERFICIE GAUSSIANA CILÍNDRICA**, de base A y longitud $2r$, centrada en la placa. Y como en el ejemplo anterior, calcularemos el flujo de las dos maneras (por integrales superficie a superficie y por el teorema).

Por lógica simétrica, deducimos que el vector Campo Eléctrico es PERPENDICULAR a la placa.

A) Cálculo del flujo por superficies:

$$\Phi_{\text{Total}} = \Phi_{\text{tapa interior}} + \Phi_{\text{tapa exterior}} + \Phi_{\text{superficie lateral}}$$

Son iguales: el producto escalar entre el campo $\mathbf{E}$ y vector de la superficie $\mathbf{A}$ (que son paralelos)

es CERO, pues el campo es PERPENDICULAR al vector superficie en el lateral del cilindro

3. OTRAS APLICACIONES DE LA LEY DE GAUSS - PLACA

PLACA CONDUCTORA EN EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO (sigue)

A)Cálculo del flujo por superficies (sigue):

Por lo tanto el flujo total, calculado superficie a superficie, valdrá:

$$\Phi_{\text{Total}} = EA + EA + 0 = 2EA$$

B)Cálculo del flujo por el teorema de Gauss:

Siendo la distribución de carga uniforme, una superficie A atrapará una carga total σA , entonces:

$$\Phi_{S_1} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma A$$

Igualando ambas expresiones, tendremos:

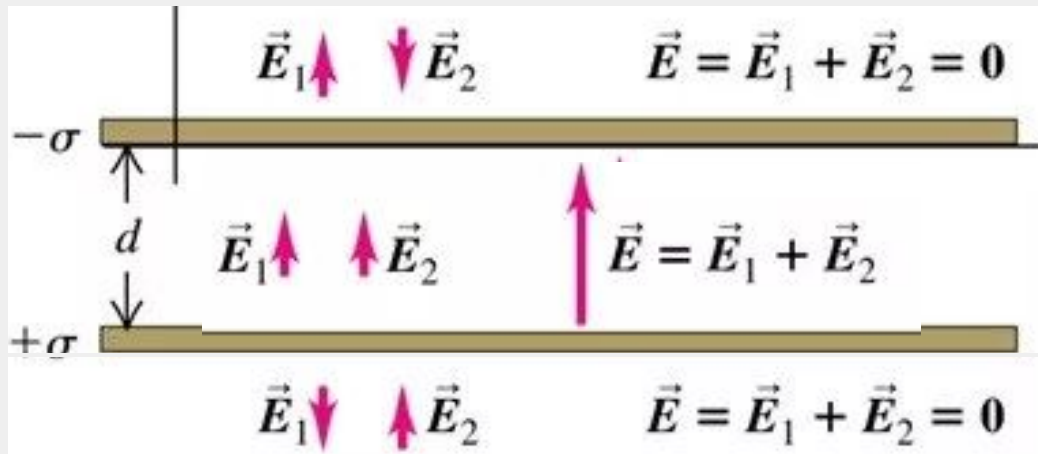
$$\frac{1}{\epsilon_0} \cancel{\sigma A} = 2 \cancel{EA} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Vemos que, curiosamente, el campo eléctrico en las proximidades de la superficie es INDEPENDIENTE de la distancia a la superficie r .

3. OTRAS APLICACIONES DE LA LEY DE GAUSS - DOS PLACAS PARALELAS

DOS PLACAS CONDUCTORAS CARGADAS PARALELAS

Vamos a considerar ahora DOS PLACAS PARALELAS puestas cerca una de la otra, con densidades de carga σ^+ y σ^- respectivamente.



Para calcular la suma del campo creado por cada placa, Vamos a recordar el resultado del campo para una placa.

Este era independiente de la distancia a la placa, perpendicular y de valor:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

En la parte exterior:

Los campos serán iguales (por ser independiente el campo de la distancia) y de signo contrario, por lo tanto SE ANULAN ENTRE SÍ.

En la zona entre las placas:

Los campos serán iguales (por ser independiente el campo de la distancia) y de signo igual, por lo tanto SE SUMAN, y su valor será:

$$E_{total} = 2 \times \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$