

Δύο σημεία σε ένα τρέχον κύμα

Αρμονικό εγκάρσιο κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου πολύ μεγάλου μήκους. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το κύμα φτάνει στο σημείο που βρίσκεται στη θέση $x=0$ το οποίο αρχίζει να εκτελεί αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $y=A\eta\mu(\omega t)$. Ο ελάχιστος χρόνος που χρειάζεται ένα σημείο του μέσου για να βρεθεί από τη θέση ισορροπίας του στη μέγιστη θετική απομάκρυνσή είναι $0,5\text{s}$ και η απόσταση των δύο ακραίων θέσεων της ταλάντωσής του είναι 1m . Δύο σημεία Κ και Λ του μέσου απέχουν από το σημείο $x=0$, το Κ απόσταση ίση με $x_K=16\lambda/3$ και το Λ $x_\Lambda=15\lambda$.

i. Να βρεθεί η απομάκρυνση του σημείου Κ τη χρονική στιγμή $t_1=20\text{s}$.

ii. Να γίνει η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του σημείου Λ σε συνάρτηση με το χρόνο.

iii. Να βρείτε πόσες φορές η κινητική ενέργεια του υλικού σημείου που βρίσκεται στη θέση Κ έχει μηδενιστεί στο χρονικό διάστημα που ξεκινά την ταλάντωσή του μέχρι τη χρονική στιγμή που φτάνει ο κυματισμός στο σημείο Λ.

iv. Να βρεθεί η ταχύτητα του σημείου Κ κάποια στιγμή που το σημείο Λ είναι στη θέση $y=A/2$ και έχει θετική ταχύτητα.

Απάντηση

i.

Από την απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων της ταλάντωσης ενός σημείου προκύπτει:

$$2A=1\text{m} \rightarrow A=0,5\text{m}$$

Ο χρόνος που χρειάζεται ένα σημείο για να βρεθεί από τη θέση ισορροπίας του στη μέγιστη θετική απομάκρυνσή της είναι $t=T/4 \rightarrow T=2\text{s}$.

Το σημείο Μ ξεκινά την ταλάντωσή του τη στιγμή $t_M = x_K/v = 16\lambda/3v = 16 \cdot T/3 = 32/3 \text{ s}$

Η απομάκρυνση του σημείου Κ είναι

$$y_K = A\eta\mu\omega(t_1 - t_K) = 0,5\eta\mu\left[\pi\left(20 - \frac{32}{3}\right)\right] = 0,5\eta\mu\left[\pi\left(\frac{28}{3}\right)\right] = 0,5\eta\mu\left[8\pi + \frac{4\pi}{3}\right] \rightarrow$$

$$y = 0,5\eta\mu\left[\frac{4\pi}{3}\right] = -0,5\eta\mu\left[\frac{\pi}{3}\right] = -\frac{\sqrt{3}}{4}m$$

ii.

$$y_K = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right) = 0,5\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{16\lambda}{3\lambda}\right)\right] = 0,5\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{16}{3}\right)\right], t \geq \frac{32}{3} \text{ s}$$

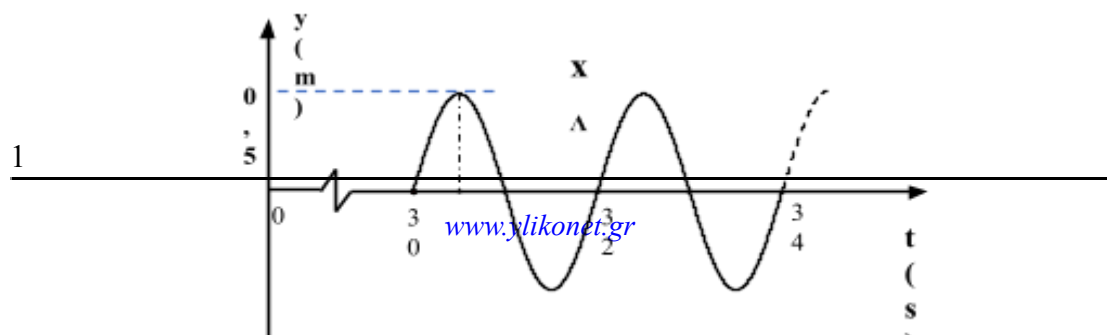
$$y_K = 0,5\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{20}{2} - \frac{16}{3}\right)\right] = 0,5\eta\mu\left[\pi\left(20 - \frac{32}{3}\right)\right] = \dots = -\frac{\sqrt{3}}{4}m$$

Για $t_1=20\text{s}$

iii.

Το Σημείο Λ ξεκινά την ταλάντωσή του τη στιγμή $t_\Lambda = x_\Lambda/v = 15\lambda/v = 15 \cdot T = 30 \text{ s}$

$$y_\Lambda = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda}\right) = 0,5\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{15\lambda}{\lambda}\right)\right] = 0,5\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{2} - 15\right)\right], t \geq 30\text{s}$$



iii.

Το χρονικό διάστημα που θα έχει ταλαντωθεί το υλικό σημείο στη θέση Κ από τη στιγμή που φτάνει το κύμα σε αυτό και μέχρι την άφιξη του κύματος στο σημείο Λ

$$\Delta t = \frac{x_{\Lambda} - x_K}{v} = \frac{15\lambda - \frac{16\lambda}{3}}{v} = \frac{29\lambda}{3v} = \frac{29T}{3} = 9T + \frac{2T}{3} = 9T + 0,66T$$

ισούται με

Σε κάθε ταλάντωση το υλικό σημείο στη θέση Κ θα έχει μηδενική κινητική ενέργεια 2 φορές στις ακραίες θέσεις. Έτσι λοιπόν στις 9 πρώτες ταλαντώσεις θα έχει μηδενιστεί η κινητική ενέργεια 18 φορές και στο διάστημα $0,66T < 0,75T$ θα μηδενιστεί άλλη μία. Συνολικά 19 φορές.

iv.

Η διαφορά φάσης των Κ και Λ είναι:

$$\Delta\Phi_{\text{Κ-Λ}} = \varphi_{\text{Κ}} - \varphi_{\text{Λ}} = \frac{2\pi(x_{\Lambda} - x_K)}{\lambda} = \frac{2\pi\left(15\lambda - \frac{16\lambda}{3}\right)}{\lambda} = \frac{58\pi}{3} \rightarrow \Delta\Phi_{\text{Κ-Λ}} = \frac{58\pi}{3} \text{ rad}$$

$$\varphi_{\text{Κ}} = \varphi_{\text{Λ}} + \frac{58\pi}{3} \quad (1)$$

$$y_{\Lambda} = A\eta\mu(\varphi_{\Lambda}) \rightarrow \frac{A}{2} = A\eta\mu(\varphi_{\Lambda}) \rightarrow \eta\mu(\varphi_{\Lambda}) = 0,5 \rightarrow \eta\mu(\varphi_{\Lambda}) = \eta\mu\frac{\pi}{6} \rightarrow$$

$$\Phi_{\Lambda} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \quad (2) \quad \text{και} \quad \Phi_{\Lambda} = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \quad (3)$$

Η (3) δίνει αρνητική ταχύτητα και συνεπώς $\Phi_{\Lambda} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ οπότε

$$\varphi_{\text{Κ}} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} + \frac{58\pi}{3} = 2\kappa\pi + \frac{117\pi}{6}$$

$$v_{\text{Κ}} = \omega A \sigma\upsilon\nu(\varphi_{\text{Κ}}) = 0,5\pi\sigma\upsilon\nu\left(2\kappa\pi + \frac{117\pi}{6}\right) = 0,5\pi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{117\pi}{6}\right) = 0,5\pi\sigma\upsilon\nu\left(20\pi - \frac{3\pi}{6}\right) \rightarrow$$

$$v_{\text{Κ}} = 0,5\pi\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$