3math trigonometrie

Exercice 1 :

Exprimer en fonction de cos x ou sin x les nombres suivants :

a) $\cos(3\pi + x)$; b) $\sin(-x-\pi)$; ; c) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$;

d) $\cos\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)$ e) $\sin(11\pi - x)$; f) $\cos\left(x-\frac{9\pi}{6}\right)$

g) $\cos(\pi - x) + \cos(x - 3\pi)$; h) $\sin(-x) - \sin(\pi + x)$;

i) $\sin(-x) - \cos(-x)$; j) $\sin(\pi + x) + \cos(\pi - x)$;

k) $\cos(-\pi - x) + \sin(x - \pi) + \sin(4\pi - x)$

Exercice 2 :

1) Soit t un réel tel que $\sin t = \frac{3}{5}$.

Calculer cos t dans chacun des cas suivantes :

a) $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$; b) $t \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

2) t est un réel tel que $\cos t = -\frac{1}{3}$.

Calculer sin t dans chacun des cas suivants :

a) $t \in [0 ; \pi]$; b) $t \in]-\pi ; 0]$.

Donner une valeur approchée de t à 10^{-2} près dans chaque cas.

Exercice 3 :

On donne $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. Calculer $\sin\frac{\pi}{8}$ et $\tan\frac{\pi}{8}$.

En déduire les lignes trigonométriques de : $\frac{3\pi}{8};\frac{5\pi}{8};\frac{7\pi}{8};\frac{9\pi}{8}$

Exercice 4 :

Résoudre dans]-π ; π] les équations suivantes :

a) $4\cos^2 x - 3 = 0$; b) $\sin^2 x - \frac{1}{2} = 0$; c) $\tan^2 x = 3$

Exercice 5 :

A l'aide du cercle trigonométrique sur lequel on représentera les solutions, résoudre les inéquations suivantes :

1) Dans]-π ; π] : a) $\sin x \geq 0$; b) $\cos x < 0$; c) $\cos x \geq 0$.

2) dans [0 ; 2π[: a) $\sin x < 0$; b) $\cos x < 0$; c) $\cos x \geq 0$.

Exercice 6 :

Résoudre dans]-π ; π[les inéquations suivantes :

a) $\cos x \leq -\frac{1}{2}$;b) $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$;c) $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Même question en donnant les solutions dans [0 ; 2π[.

a) $\cos x \leq -1$; b) $\frac{1}{2} \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < \frac{1}{2}$

Exercice 7 :

On veut résoudre l'équation $\sqrt{3}\cos x = \sin x$ dans [0 ; 2π[.

a) Démontrer que x est aussi solution de $\cos^2 x = \frac{1}{4}$

b) Résoudre l'équation $\cos^2 x = \frac{1}{4}$ dans [0 ; 2π[.

c) En déduire les solutions de l'équation (on remarquera que cos x et sin x doivent avoir le même signe).

Exercice 8 :

Résoudre dans]-π ; π] les équations données et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

a) $\cos 2x = 1$; b) $\sin 2x = 0$; c) $\sin 2x = -1$; d) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$

Exercice 9 :

Résoudre dans [0 ; 2π[les équations suivantes :

a) $\cos 2x = \sin x$; b) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

Exercice 10 :

Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle I.Représenter les points aux solutions sur le cercle trigonométrique.

a) $\cos x = -\frac{1}{2}$; I =] - π ; 2π] b) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; I =] - π ; π]

c) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; I = [0 ; 2π[d) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; I = [0 ; 2π[

e) $\sin x = \sin\frac{\pi}{6}$; I = [-2π ; 0[f) $\cos x = -\cos\frac{\pi}{4}$; I $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$

g) $\sin x = 1$; I = [0 ; 2π] h) $\cos x = -1$; I = [- π ; π].

Exercice 11 :

x désigne un réel quelconque. Simplifier les expressions :

1) a) $A = \cos x + \cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)$

b) $B = \sin x + \sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)$

2) a) $A' = \cos^2 x + \cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$

b) $B' = \sin^2 x + \sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$

3) On considère les points M,N et P du cercle trigonométrique repérés par les réels x, $x + \frac{2\pi}{3}$, $x + \frac{4\pi}{3}$.

Quelle est la nature du triangle MNP ? quel est son centre de gravité ? en déduire la valeur de $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$ et retrouver le résultat de la question 1).

Exercice 12 :

Egalité diverses :

Etablir les égalités suivantes :

a) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$.

b) $\cos^4 x + \sin^4 x + \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1$.

c) $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$; (x différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi$ et $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, k ∈Z).

d) $(\cos x + \sin x)\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2x\right) = \cos^3 x + \sin^3 x$.

e) $\cos^2 x \sin^2 x = \frac{1-\cos 4x}{8}$

Exercice 13 :

1) Exprimer $\sin^2 2x$ et $\cos^2 2x$ en fonction de cos 4x.

2) Démontrer que $\cos^4 x + \sin^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$.

Exercice 14 :

On suppose que x est différent de $\frac{k\pi}{2}$ avec k élément de Z.

a) Démontrer que $\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$

b) Démontrer que $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$ est une constante.

Exercice 15 :

Soit P = cos x cos 2x cos 4x, où x désigne un réel.

a) Démontrer que : $P \times \sin x = \frac{1}{2}(\sin 2x)(\cos 2x)(\cos 4x)$
$= \frac{1}{8}\sin 8x.$

b) En remplaçant x par $\frac{\pi}{7}$, démontrer que : $\cos\frac{\pi}{7} \times \cos\frac{2\pi}{7} \times \cos\frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$

Exercice 16 :

1) Démontrer que :

a) $\cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{8} + \cos\frac{5\pi}{8} + \cos\frac{7\pi}{8} = 0.$

b) $\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8} = 2.$

2) Déterminer: $\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8}$

Exercice 17 :

Soit f : $\mathrm{IR} \to \mathrm{IR};\ x \mapsto 1 + \cos 2x - \sin 2x$

1) a) Montrer que $f(x) = 2\sqrt{2}\cos x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
b) Résoudre dans $[0, \pi]$: $f(x) = 0$ et $f(x) > 0$

2) g : $[0,\pi] \to \mathrm{IR};\ x \mapsto \frac{\sin 2x - 1}{1 + \cos 2x - \sin 2x}$
a) Déterminer le domaine de définition de g
b) Résoudre dans $[0, \pi]$: $g(x) \geq 0$

3) a) Montrer que pour tout $x \in D_g$: $g(x) = \frac{1}{2}(\tan x - 1)$
b) En déduire que $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$

Exercice 18 :

Soit l'application f : $[0,\pi] \to IR$

$x \mapsto -2\sin^2 x - (\sqrt{3} + 2)\cos x + \sqrt{3} + 2$

1) Calculer $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

2) Soit α l'élément de $[0,\pi]$ tel que $\tan\alpha = -\sqrt{2}$. Calculer $\cos\alpha$; $\tan\alpha$ puis $f(\alpha)$.

3) Montrer que pour tout $x \in [0,\pi]$; $f(x) = 2\cos^2 x - (\sqrt{3} + 2)\cos x + \sqrt{3}$

4) Résoudre dans $[0,\pi]$ l'équation $f(x) = 0$ puis l'équation $2\cos^2 x - (\sqrt{3} + 2)|\cos x| + \sqrt{3} = 0$

5) Résoudre dans $[0,\pi]$ l'inéquation $f(x) > 0$

6) Dans cette question x désigne un élément de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

a) Montrer que $(\cos x - \sin x)^2 + (\cos x + \sin x)^2 = 2$

b) Exprimer $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + f(\pi - x)$ à l'aide de cosx et sinx.

c) Résoudre l'équation $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + f(\pi - x) = \sqrt{3}$

Exercice 19 :

1) Démontrer que $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

2) Résoudre dans $[0 ; 2\pi[$ les équations :

a) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = -1$; b) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$.

Exercice 20 :

On considère un point A de coordonnées polaires (R, θ) dans $(O;\vec{i})$. Soit B tel que OAB est un triangle équilatéral direct.

a) Déterminer les coordonnées polaires de B dans $(O;\vec{i})$.

b) En déduire que les coordonnées cartésiennes de B sont :

$x_B = R\left(\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)$;

$y_B = R\left(\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$

Application

Déterminer les coordonnées cartésiennes de B, connaissant celle de A dans $(O,\vec{i},\vec{j})$;

a) A(2 ; 3) ; b) A(1 ; -1)

En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 21 :

Dans le repère orthonormal direct $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère le point M de coordonnées $(2\sqrt{3}\ ; 2)$

1) Déterminer des coordonnées polaires de M dans $(O,\vec{i})$.

2) On considère le point N tel que : $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}) = \frac{3\pi}{4}(2\pi)$ et $ON = \frac{1}{2}OM$

Déterminer des coordonnées polaires de N dans le repère $(O,\vec{i})$

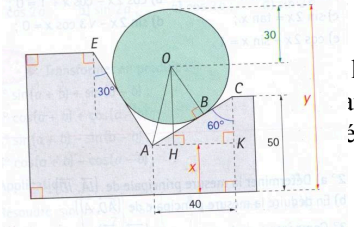
3) En utilisant les formules d'addition, calculer : $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

En déduire les coordonnées cartésiennes de N dans $(O,\vec{i},\vec{j})$

4) Déterminer la distance MN et une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de $(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MN})$

Exercice 22 :

Une pièce métallique est entaillée selon l'angle $E\hat{A}C$. On place un cylindre de rayon 30 mm comme ci-dessous :



l'angle $K\hat{A}C$
ur défaut, la cote x.
éduire la cote y à 10^{-2} près par

