

3math trigonometrie

Exercice 1 :

Exprimer en fonction de $\cos x$ ou $\sin x$ les nombres suivants :

- a) $\cos(3\pi + x)$; b) $\sin(-x - \pi)$; c) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$;
d) $\cos\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)$; e) $\sin(11\pi - x)$; f) $\cos\left(x - \frac{9\pi}{6}\right)$;
g) $\cos(\pi - x) + \cos(x - 3\pi)$; h) $\sin(-x) - \sin(\pi + x)$;
i) $\sin(-x) - \cos(-x)$; j) $\sin(\pi + x) + \cos(\pi - x)$;
k) $\cos(-\pi - x) + \sin(x - \pi) + \sin(4\pi - x)$

Exercice 2 :

- 1) Soit t un réel tel que $\sin t = \frac{3}{5}$.
Calculer $\cos t$ dans chacun des cas suivants :

a) $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; b) $t \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

- 2) t est un réel tel que $\cos t = -\frac{1}{3}$.
Calculer $\sin t$ dans chacun des cas suivants :

a) $t \in [0; \pi]$; b) $t \in]-\pi; 0]$.

Donner une valeur approchée de t à 10^{-2} près dans chaque cas.

Exercice 3 :

On donne $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. Calculer $\sin \frac{\pi}{8}$ et $\tan \frac{\pi}{8}$.

En déduire les lignes trigonométriques de : $\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}$

Exercice 4 :

Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ les équations suivantes :

a) $4\cos^2 x - 3 = 0$; b) $\sin^2 x - \frac{1}{2} = 0$; c) $\tan^2 x = 3$

Exercice 5 :

A l'aide du cercle trigonométrique sur lequel on représentera les solutions, résoudre les inéquations suivantes :

- 1) Dans $]-\pi; \pi]$: a) $\sin x \geq 0$; b) $\cos x < 0$; c) $\cos x \geq 0$.
2) dans $[0; 2\pi[$: a) $\sin x < 0$; b) $\cos x < 0$; c) $\cos x \geq 0$.

Exercice 6 :

Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ les inéquations suivantes :

a) $\cos x \leq -\frac{1}{2}$; b) $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Même question en donnant les solutions dans $[0; 2\pi[$.

a) $\cos x \leq -1$; b) $\frac{1}{2} \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < \frac{1}{2}$

Exercice 7 :

On veut résoudre l'équation $\sqrt{3} \cos x = \sin x$ dans $[0; 2\pi[$.

a) Démontrer que x est aussi solution de $\cos^2 x = \frac{1}{4}$

b) Résoudre l'équation $\cos^2 x = \frac{1}{4}$ dans $[0; 2\pi[$.

c) En déduire les solutions de l'équation (on remarquera que $\cos x$ et $\sin x$ doivent avoir le même signe).

Exercice 8 :

Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ les équations données et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

a) $\cos 2x = 1$; b) $\sin 2x = 0$; c) $\sin 2x = -1$; d) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$

Exercice 9 :

Résoudre dans $[0; 2\pi[$ les équations suivantes :

a) $\cos 2x = \sin x$; b) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

Exercice 10 :

Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle I . Représenter les points aux solutions sur le cercle trigonométrique.

a) $\cos x = -\frac{1}{2}$; $I =]-\pi; 2\pi]$; b) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $I =]-\pi; \pi]$

c) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $I = [0; 2\pi[$; d) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $I = [0; 2\pi[$

e) $\sin x = \sin \frac{\pi}{6}$; $I = [-2\pi; 0[$; f) $\cos x = -\cos \frac{\pi}{4}$; $I =$

$\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$; g) $\sin x = 1$; $I = [0; 2\pi]$; h) $\cos x = -1$; $I = [-\pi; \pi]$.

Exercice 11 :

x désigne un réel quelconque. Simplifier les expressions :

1) a) $A = \cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$

b) $B = \sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$

2) a) $A' = \cos^2 x + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$

b) $B' = \sin^2 x + \sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$

3) On considère les points M, N et P du cercle trigonométrique

repérés par les réels $x, x + \frac{2\pi}{3}, x + \frac{4\pi}{3}$.

Quelle est la nature du triangle MNP ? quel est son centre de gravité ? en déduire la valeur de $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$ et retrouver le résultat de la question 1).

Exercice 12 :

Egalité diverses :

Etablir les égalités suivantes :

a) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$.

b) $\cos^4 x + \sin^4 x + \frac{1}{2} \sin^2 2x = 1$.

c) $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$; (x différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi$ et $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$).

d) $(\cos x + \sin x) \left(1 - \frac{1}{2} \sin 2x\right) = \cos^3 x + \sin^3 x$.

e) $\cos^2 x \sin^2 x = \frac{1 - \cos 4x}{8}$

Exercice 13 :

1) Exprimer $\sin^2 2x$ et $\cos^2 2x$ en fonction de $\cos 4x$.

$$2) \text{ Démontrer que } \cos^4 x + \sin^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x.$$

Exercice 14 :

On suppose que x est différent de $\frac{k\pi}{2}$ avec k élément de $\mathbb{Z}$.

$$a) \text{ Démontrer que } \frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$b) \text{ Démontrer que } \frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} \text{ est une constante.}$$

Exercice 15 :

Soit $P = \cos x \cos 2x \cos 4x$, où x désigne un réel.

$$a) \text{ Démontrer que : } P \times \sin x = \frac{1}{2} (\sin 2x)(\cos 2x)(\cos 4x) = \frac{1}{8} \sin 8x.$$

$$b) \text{ En remplaçant } x \text{ par } \frac{\pi}{7}, \text{ démontrer que : } \cos \frac{\pi}{7} \times \cos \frac{2\pi}{7} \times \cos \frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$$

Exercice 16 :

1) Démontrer que :

$$a) \cos \frac{\pi}{8} + \cos \frac{3\pi}{8} + \cos \frac{5\pi}{8} + \cos \frac{7\pi}{8} = 0.$$

$$b) \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8} = 2.$$

$$2) \text{ Déterminer : } \cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8}$$

Exercice 17 :

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 1 + \cos 2x - \sin 2x$

$$1) a) \text{ Montrer que } f(x) = 2 \sqrt{2} \cos x \cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$b) \text{ Résoudre dans } [0, \pi] : f(x) = 0 \text{ et } f(x) > 0$$

$$2) g: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{\sin 2x - 1}{1 + \cos 2x - \sin 2x}$$

$$a) \text{ Déterminer le domaine de définition de } g$$

$$b) \text{ Résoudre dans } [0, \pi] : g(x) \geq 0$$

$$3) a) \text{ Montrer que pour tout } x \in D_g : g(x) = \frac{1}{2} (\tan x - 1)$$

$$b) \text{ En déduire que } \tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$$

Exercice 18 :

Soit l'application $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto -2 \sin^2 x - (\sqrt{3} + 2) \cos x + \sqrt{3} + 2$$

$$1) \text{ Calculer } f\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ et } f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$2) \text{ Soit } \alpha \text{ l'élément de } [0, \pi] \text{ tel que } \tan \alpha = -\sqrt{2}. \text{ Calculer } \cos \alpha; \tan \alpha \text{ puis } f(\alpha).$$

$$3) \text{ Montrer que pour tout } x \in [0, \pi]; f(x) = 2 \cos^2 x - (\sqrt{3} + 2) \cos x + \sqrt{3}$$

$$4) \text{ Résoudre dans } [0, \pi] \text{ l'équation } f(x) = 0 \text{ puis l'équation}$$

$$2 \cos^2 x - (\sqrt{3} + 2) |\cos x| + \sqrt{3} = 0$$

$$5) \text{ Résoudre dans } [0, \pi] \text{ l'inéquation } f(x) > 0$$

$$6) \text{ Dans cette question } x \text{ désigne un élément de } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$a) \text{ Montrer que } (\cos x - \sin x)^2 + (\cos x + \sin x)^2 = 2$$

$$b) \text{ Exprimer } f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + f(\pi - x) \text{ à l'aide de } \cos x \text{ et } \sin x.$$

$$c) \text{ Résoudre l'équation } f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + f(\pi - x) = \sqrt{3}$$

Exercice 19 :

$$1) \text{ Démontrer que } \cos x - \sqrt{3} \sin x = 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$2) \text{ Résoudre dans } [0; 2\pi[\text{ les équations :}$$

$$a) \cos x - \sqrt{3} \sin x = -1; b) \cos x - \sqrt{3} \sin x = 0.$$

Exercice 20 :

On considère un point A de coordonnées polaires (R, θ) dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit B tel que OAB est un triangle équilatéral direct.

$$a) \text{ Déterminer les coordonnées polaires de } B \text{ dans } (O; \vec{i}, \vec{j}).$$

$$b) \text{ En déduire que les coordonnées cartésiennes de } B \text{ sont :}$$

$$x_B = R \left(\frac{1}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right);$$

$$y_B = R \left(\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \right)$$

Application

Déterminer les coordonnées cartésiennes de B , connaissant

$$\text{celle de } A \text{ dans } (O; \vec{i}, \vec{j});$$

$$a) A(2; 3); b) A(1; -1)$$

$$\text{En déduire les valeurs exactes de } \cos \frac{\pi}{12} \text{ et } \sin \frac{\pi}{12}.$$

Exercice 21 :

Dans le repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le

$$\text{point } M \text{ de coordonnées } (2\sqrt{3}; 2)$$

$$1) \text{ Déterminer des coordonnées polaires de } M \text{ dans } (O; \vec{i}, \vec{j}).$$

$$2) \text{ On considère le point } N \text{ tel que : } (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \frac{3\pi}{4} (2\pi) \text{ et}$$

$$ON = \frac{1}{2} OM$$

$$\text{Déterminer des coordonnées polaires de } N \text{ dans le repère } (O; \vec{i}, \vec{j})$$

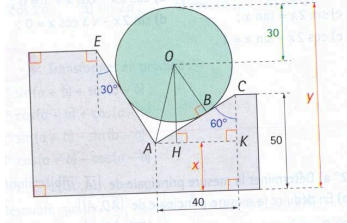
- 3) En utilisant les formules d'addition, calculer : $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$
 et
 $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

En déduire les coordonnées cartésiennes de N dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 4) Déterminer la distance MN et une valeur approchée à 10^{-2}
 près par défaut de $(\vec{MO}, \vec{MN})$

Exercice 22 :

Une pièce métallique est entaillée selon l'angle $\widehat{EAC}$. On place un cylindre de rayon 30 mm comme ci-dessous :



l'angle $\widehat{KAC}$
 r défaut, la cote x.
 éduire la cote y à 10^{-2} près par

