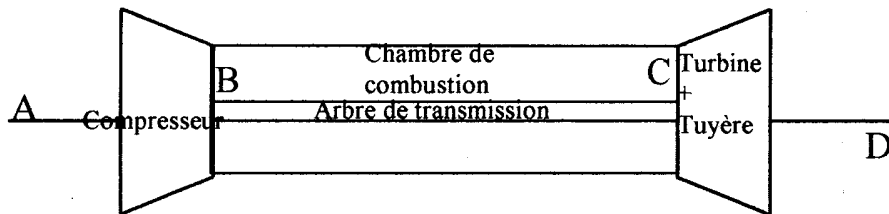


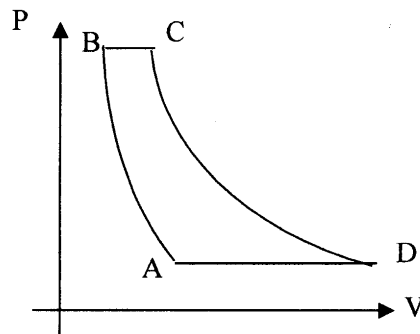
LES CALCULATRICES ET DOCUMENTS SONT INTERDITS

A) TURBOREACTEUR

Le principe de fonctionnement d'un turbo-réacteur destiné à la propulsion d'un avion est schématisé sur la figure suivante, les gaz accélérés sont éjectés par la tuyère :



On admettra que tout se passe comme si un gaz décrivait le cycle (A,B,C,D,A) suivant appelé cycle de Brayton et Joule :



On modélise le gaz comme un gaz parfait. On note M sa masse molaire et γ le rapport des capacités thermiques à pression constante et à volume constant. On considèrera l'unité de masse de gaz qui décrit le cycle. On note c_p la capacité thermique massique à pression constante.

La pression, la vitesse dans un référentiel lié au réacteur et la température qui caractérisent le gaz aux différents points du cycle sont :

$$P_A, v_A, T_A \quad P_B, v_B, T_B \quad P_C, v_C, T_C \quad P_D, v_D, T_D$$

Les vitesses en B et C sont négligeables.

De A à B, dans le compresseur, le gaz subit une compression que l'on modélise comme isentropique

De B à C, dans la chambre de combustion, le gaz reçoit de la chaleur de façon isobare, quasistatique mécaniquement réversible.

De C à D, dans la turbine et la tuyère, il se détend suivant une modélisation isentropique en entraînant la turbine puis en étant accéléré.

Enfin de D à A, on complète le cycle par une transformation quasistatique, mécaniquement réversible et isobare. La transformation DA du cycle correspond d'autant plus à une modélisation que dans la réalité les gaz aspirés en A s'échappent en D. P_A et P_D sont identiques et ont pour valeur la pression atmosphérique.

Le travail fourni par le gaz à la turbine entre C et D est intégralement restitué au gaz au niveau du compresseur entre A et B par l'intermédiaire de l'arbre de transmission. On néglige les variations de l'énergie potentielle de pesanteur du gaz.

Le régime est permanent.

1) Cycle dans le diagramme T,S

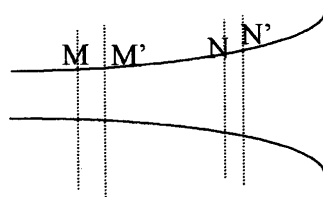
- 1-1) Partant de l'identité fondamentale de la thermodynamique trouver la relation entre la différentielle de l'enthalpie dH , de l'entropie dS et de la pression dP .
- 1-2) Grâce à la seconde loi de Joule, en déduire la relation entre la différentielle de la température, celle de l'entropie et de la pression.
- 1-3) En déduire la loi de variation de la température en fonction de l'entropie lors d'une transformation isobare.
- 1-4) Représenter l'allure du cycle de Brayton et Joule dans un diagramme T fonction de S.

2) Rendement du turboréacteur

- 2-1) Pourquoi considère-t-on que pour cette machine thermique la quantité utile est la variation d'énergie cinétique de l'unité de masse entre A et D ?
- 2-2) On note Q_{BC} le transfert thermique reçu par l'unité de masse de gaz dans la chambre de combustion. On rappelle que les vitesses en B et C sont négligeables. Montrer qu'on peut exprimer Q_{BC} en fonction de la variation de l'enthalpie de l'unité de masse de gaz entre B et C.
- 2-3) a) Calculer la variation de la somme de l'enthalpie et de l'énergie cinétique de l'unité de masse de gaz entre A et B. On notera W_C le travail reçu par l'unité de masse de gaz lors de son passage par le compresseur.
b) Même question entre C et D. On notera W_T le travail algébriquement reçu par l'unité de masse de gaz lors de son passage par la turbine.
c) En déduire la variation de la somme de l'enthalpie et de l'énergie cinétique de l'unité de masse de gaz entre A et D en fonction de la variation de l'enthalpie de l'unité de masse entre B et C.
- 2-4) Transformer la relation précédente grâce à la seconde loi de Joule.
- 2-5) Exprimer le rendement du turboréacteur en fonction des températures.
- 2-6) Grâce aux lois de Laplace, exprimer le rendement en fonction du taux de compression P_B/P_A et de γ .

3) Etude de la portion de tuyère en aval de la turbine

Nous étudierons ci-dessous le fonctionnement de la portion de tuyère qui transforme une partie de l'énergie thermique des gaz qui s'échappent de la turbine en énergie cinétique.



- 3-1) On considère un profil de tuyère quelconque, le régime est permanent :
Le système considéré est le gaz qui à l'instant t est compris entre les sections M et N, il occupe à l'instant $t + dt$ le volume compris entre les sections M' et N'.
En appliquant à ce système le premier principe généralisé (c'est à dire en considérant l'énergie cinétique en plus de l'énergie interne) montrer que :

$$c_p (T_M - T_N) = \frac{1}{2} (V_N^2 - V_M^2)$$

On considèrera que l'énergie potentielle de pesanteur ne varie pas et qu'il n'y a pas de transfert thermique.

3-2) Exprimer la capacité thermique massique c_p en fonction de la constante de Joule molaire R , de la masse molaire M du gaz considéré comme parfait et de γ .

En déduire une relation entre dT , R , M , γ et $d(v^2)$ dans la tuyère.

3-3) Dériver logarithmiquement la loi de Laplace portant sur les variables T et P .

3-4a) Exprimer la masse volumique du gaz parfait en fonction de la pression et de la température.

b) Dériver logarithmiquement la conservation du débit massique, on notera s la section variable de la tuyère.

3-5) On rappelle que la vitesse du son c dans un gaz est donnée par $c = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}$

Montrer qu'il existe un domaine de vitesse où un élargissement de la tuyère provoque une accélération du gaz.

B) FUSEE ET SATELLITE

1) Champ gravitationnel terrestre

1-1) En considérant la terre comme une distribution uniforme de masses à symétrie sphérique, calculer le champ gravitationnel qui règne en tout point de l'espace à une distance r de son centre en fonction du champ g_s qui règne à sa surface, de r et de R le rayon de la terre. Pour la démonstration on introduira la masse volumique ρ de la terre et la constante universelle de la gravitation G . On distinguera les cas ($r < R$) et ($r > R$).

1-2) En déduire le potentiel gravitationnel en tout point de l'espace ; on considèrera que ce dernier est nul à l'infini.

2) Propulsion par réaction

Une fusée se déplace en translation rectiligne dans le prolongement d'un rayon de la terre en s'en éloignant. $\vec{r}(t)$ décrit la position de la fusée.

On note $\vec{V}(t)$ et $m(t)$ sa vitesse et sa masse à l'instant t . $\vec{V}(t)$ est relative au référentiel terrestre,

$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$. $\vec{u}$ est la vitesse d'éjection des gaz par rapport à la fusée, elle est constante.

On note D le débit massique des gaz supposé constant. On aura donc :

$m(t) = m_0 - D t$ où m_0 est la masse initiale de la fusée et des gaz qu'elle contient.

La fusée est à une distance $r > R$ de la terre, elle est soumise au champ gravitationnel de la terre calculé à la question précédente.

2-1) Poser sans chercher à la résoudre l'équation différentielle en $\vec{r}(t)$.

On devra considérer le système fermé constitué à l'instant t de la fusée et des gaz qu'elle contient,

l'ensemble possède une masse $m(t)$ et est animé de la vitesse $\vec{V}(t)$.

A l'instant $t + dt$ le système s'est scindé en deux parties ;

D'une part la fusée et les gaz qu'elle contient encore, cette partie a pour masse $m(t+dt) = m(t) + dm$

avec $dm < 0$ et est animée de la vitesse $\vec{V}(t+dt)$

et d'autre part de la masse $-dm$ des gaz qui ont été éjectés entre les instants t et $t+dt$, ces gaz sont animés de la vitesse $\vec{V}(t) + \vec{u}$

2-2) On suppose maintenant que la vitesse initiale est nulle dans le référentiel terrestre et qu'à tout instant la terre est suffisamment éloignée pour que l'on puisse négliger le champ de gravitation qu'elle crée, d'autre part $m(t)$ ne peut diminuer en dessous de la valeur m_1 , masse de la fusée hors carburant. On rappelle que le débit d'éjection des gaz est constant. Résoudre l'équation différentielle en v et calculer la vitesse maximale atteinte.

3) Energie des états liés

On considère maintenant un satellite orbitant autour d'un astre. On travaille en coordonnées polaires, l'origine de l'espace est prise sur l'astre attracteur considéré comme infiniment plus lourd

que le satellite. On note $C = r^2 \frac{d\theta}{dt}$ la constante aérolaire et G la constante universelle de la gravitation.

3-1) Quelle est l'énergie potentielle gravitationnelle du satellite de masse m dans le champ de l'astre de masse M . On choisit l'origine de l'énergie potentielle de gravitation à l'infini.

3-2) Exprimer son énergie cinétique en fonction de dr/dt , C , m et r . Exprimer son énergie mécanique totale E .

3-3) a) Montrer que pour C et E données, correspondant à un état lié, la dérivée dr/dt s'annule en deux points particuliers.

b) On admettra que les états liés sont des ellipses ; à quels points fait-on référence à la question précédente ?

c) Exprimer l'énergie d'un état lié en fonction de G, M, m et a demi-grand-axe de l'ellipse.

4) Perte d'altitude d'un satellite

On suppose qu'un satellite de masse m orbite quasi circulairement autour d'un astre de masse M . Le satellite est repéré en polaires par rapport au centre de l'astre. Des frottements dans l'atmosphère raréfiée où il orbite lui font perdre un peu d'énergie.

4-1) En utilisant le résultat de la question 3-3-c montrer que r diminue. On considèrera les orbites comme quasi circulaires.

4-2) En déduire que l'énergie potentielle du satellite diminue mais que son énergie cinétique et donc sa vitesse augmentent. On considère encore les orbites comme quasi circulaires.

4-3) On modélise le frottement comme un frottement fluide proportionnel à la vitesse :

$\vec{F}_{\text{frott}} = -m \vec{V} / \tau$. Que représente τ ? Comparer τ à la période de rotation sachant que les frottements sont faibles.

4-4) En projetant la relation fondamentale de la dynamique sur la direction orthoradiale, montrer

que la quantité $r^2 \frac{d\theta}{dt}$ subit une variation exponentielle.

4-5) En déduire au premier ordre la variation relative de r pendant l'intervalle de temps dt . Le mouvement sera considéré comme quasi circulaire.

4-6) Calculer la chute relative d'altitude pour une révolution en fonction de T période de révolution et de τ .

5) Dépressurisation

Le volume interne d'un satellite est modélisé comme un cube de côté a . La pression interne du satellite a pour valeur initiale P_0 . On utilise la théorie cinétique simplifiée suivante pour décrire le gaz à l'intérieur du satellite :

les molécules considérées comme ponctuelles et sans interaction ont des vitesses identiques en norme, notée u , cette vitesse reste constante au cours de la dépressurisation. A un instant quelconque la répartition des molécules dans le satellite est uniforme et la distribution des vitesses est la suivante :

1/6 des molécules se dirigent dans la direction $\vec{u}_x$.

1 /6 des molécules se dirigent dans la direction $-\vec{u}_x$.

1/6 des molécules se dirigent dans la direction $\vec{u}_y$.

1 /6 des molécules se dirigent dans la direction $-\vec{u}_y$.

1 /6 des molécules se dirigent dans la direction $\vec{u}_z$.

1 /6 des molécules se dirigent dans la direction $-\vec{u}_z$.

$\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$ sont parallèles aux arêtes du cube

Une petite ouverture sur le vide de section s est pratiquée à l' instant initial. On admet que lorsqu'une molécule atteint la section, elle ne peut plus réintégrer le satellite. Calculer la loi de décroissance de la pression en fonction du temps.

6) Orbites stables d'un satellite

Montrer que les états liés d'un satellite stable autour d'un astre, c'est à dire ne perdant pas d'énergie, sont des ellipses.

On pourra utiliser la formule de Binet pour l'accélération, formule que l'on démontrera :

$$\vec{a} = - \frac{C^2}{r^2} \left[\frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \vec{e}_r$$