

При розв'язуванні задач прикладного змісту на знаходження найбільшого і найменшого значень функції керуються такою схемою:

- 1) Задачу «переводять» на мову функцій. Для цього обирають зручний параметр x для величини, яка нас цікавить, і складають функцію $y=f(x)$;
- 2) За допомогою похідної знаходять найбільше чи найменше значення цієї функції на деякому проміжку;
- 3) З'ясовують, який практичний зміст має отриманий результат.

Задача 1

Швидкість v тіла, що рухається у вертикальному напрямку, змінюється за законом $v = 9 - 10t$ (м/с). Визначте швидкість тіла в момент приземлення, якщо воно в початковий момент знаходилося на висоті 2м від землі.

Розв'язання:

- 1) Знайдемо прискорення тіла, що рухається за законом:

$$a = v'(t) = -10 \text{ (м/с)}.$$

Оскільки прискорення стало, то тіло рухається за квадратичним законом:

$$h = \frac{at^2}{2} + v_0 t + h_0.$$

- 2) $v_0 = v(0) = 9$ (м/с).

- 3) Підставимо у формулу значення a та v_0 :

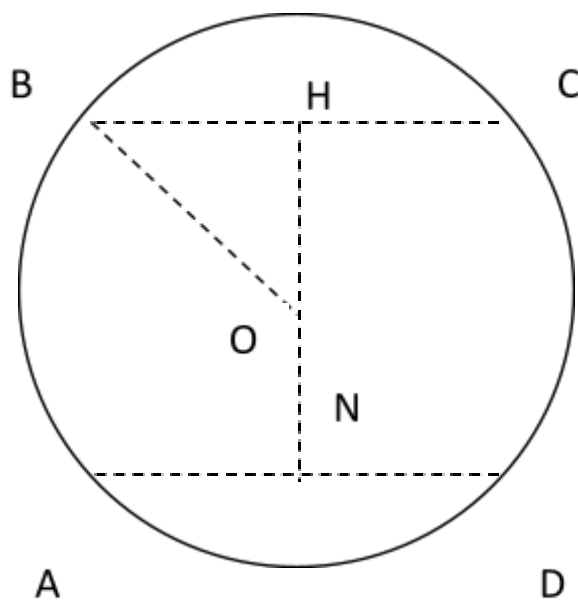
$$h = -\frac{10t^2}{2} + 9t + 2 = -5t^2 + 9t + 2..$$

Розв'язавши квадратне рівняння, дістанемо час приземлення тіла $t = 2$ та швидкість у момент приземлення $v = 9 - 10 \cdot 2 = -11$ (м/с).

Відповідь: -11 м/с.

Задача 2

У дану кулю вписати циліндр з найбільшою площею бічної поверхні.



Розв'язання:

Нехай R - радіус кулі, H – висота циліндра, r – радіус основи циліндра, який

дорівнює $r = \sqrt{R^2 - \frac{H^2}{4}}$. Площа бічної поверхні циліндра обчислюється за формулою:

$$S = 2\pi rH$$

Площа бічної поверхні, як функція від H , матиме такий вигляд:

$$S(H) = 2\pi H \sqrt{R^2 - \frac{H^2}{4}} = 2\pi \sqrt{R^2 H^2 - \frac{H^4}{4}},$$

Де $H \in (0; 2R)$.

Знайдемо критичні точки функції $S(H)$. Для цього розв'яжемо рівняння:

$$S'(H) = 0.$$

$$S'(H) = 2\pi \left(\sqrt{R^2 H^2 - \frac{H^4}{4}} \right)' = 2\pi \frac{(R^2 H^2 - \frac{H^4}{4})'}{2\sqrt{R^2 H^2 - \frac{H^4}{4}}} = \left(\frac{2\pi R^2 - \pi H^2}{\sqrt{R^2 H^2 - \frac{H^4}{4}}} \right) * H,$$

$$\frac{2\pi R^2 - \pi H^2}{\sqrt{R^2 H^2 - \frac{H^4}{4}}} = 0,$$

$$2\pi R^2 - \pi H^2 = 0,$$

$$\pi H^2 = 2\pi R^2, |H| = \sqrt{2}R.$$

Відповідь: $H = \sqrt{2}R$

Задача 3

Є прямокутний лист жерсті розміром 80×50 см. Треба виготовити з нього відкриту зверху коробку найбільшої місткості, вирізавши по кутах квадрати й загнувши краї. Якщо повинна бути довжина сторони такого квадрата?

Розв'язання:

Позначимо через x довжину сторони квадрата, що вирізаються. Очевидно, що $0 \leq x \leq 25$. Об'єм коробки (прямокутного паралелепіпеда) дорівнює добутку площі основи на висоту. За вказаного способу виготовлення коробки її основа – прямокутник зі сторонами $80-2x$ і $50-2x$, а висота коробки – x .

Відповідно об'єм коробки дорівнює:

$$V(x) = (80 - 2x)(50 - 2x)x = 4x^3 - 260x^2 + 4000x.$$

Задачу зведено до знаходження найбільшого значення функції на проміжку

$[0; 25]$. Знайдемо критичні точки функції $V(x)$:

$$V'(x) = 12x^2 - 520x + 4000,$$

$$12x^2 - 520x + 4000 = 0,$$

$$x_1 = \frac{100}{3}, x_2 = 10.$$

Інших критичних точок функція не має, оскільки похідна існує для всіх x . Проміжку $[0;25]$ належить лише одна точка $x=10$. Обчислимо значення функції $V(x)$ у цій точці й на кінцях проміжку:

$$V(10) = 1800, V(0) = 0, V(25) = 0.$$

Отже, найбільшого значення функція $V(x)$ набуває на проміжку $[0;25]$ в точці 10. Це означає, що коробку найбільшого об'єму можна виготовити, вирізавши по кутах заданого листа жерсті квадрати зі сторони.

Розв'язування вправ самостійно:

1. Подайте число 12 у вигляді суми двох невід'ємних чисел так, щоб добуток квадрата одного з цих чисел на подвоєне друге число був найбільшим.
Відповідь:
2. Парканом довжиною 80 м треба огородити прямокутну ділянку найбільшої площі. Знайдіть розміри ділянки.
3. У півколо радіуса 6 см вписано прямокутник найбільшого периметра. Знайдіть сторони прямокутника.