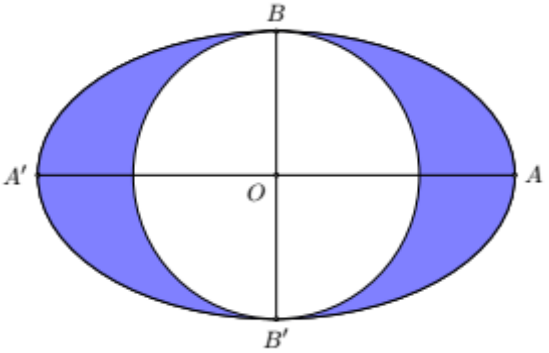
Câu 1. **[2D3-2.3-4] (THPT-Yên-Mô-A-Ninh-Bình-2018-2019-Thi-tháng-4)** Trong mặt phẳng, cho đường elip (E) có độ dài trục lớn là $AA'=10$, độ dài trục nhỏ là $BB'=6$, đường tròn tâm O có đường kính là BB' (như hình vẽ bên dưới). Tính thể tích V của khối tròn xoay có được bằng cách cho miền hình hình phẳng giới hạn bởi đường elip và được tròn (được tô đậm trên hình vẽ) quay xung quanh trục AA'.

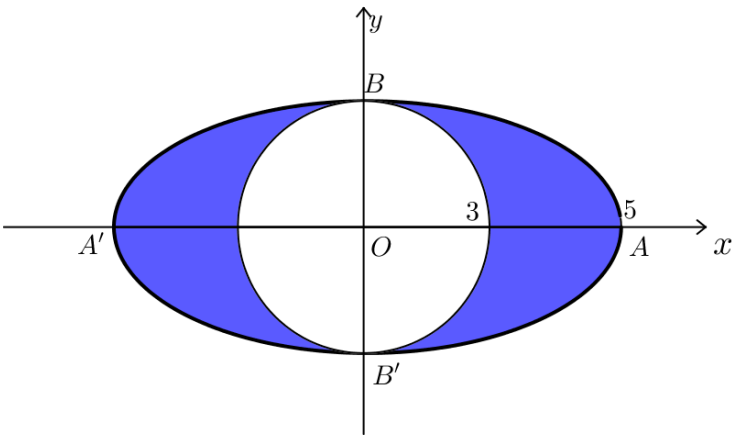


A. $V=36\pi$. **B.** $V=60\pi$. **C.** $V=24\pi$. **D.** $V=\dfrac{20\pi}{3}$.

Lời giải

Tác giả: Bùi Văn Lưu; Fb: Bùi Văn Lưu

Chọn C



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.

Giả sử phương trình chính tắc của elip có dạng $(E):\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ \ (a>b>0)$.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases}AA'=10\\BB'=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a=10\\2b=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5\\b=3\end{cases}\Rightarrow(E):\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1\Rightarrow y=\pm\dfrac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$.

Đường tròn tâm O bán kính OB có phương trình $x^2+y^2=9\Rightarrow y=\pm\sqrt{9-x^2}$.

Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$, $y=0$, $x=0,x=5$ quay xung quanh trục Ox.

Gọi V_2 là thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{9-x^2}$, $y=0$, $x=0, x=3$ quay xung quanh trục Ox.

Thể tích khối tròn xoay cần tìm bằng:

$$V=2\left(V_1-V_2\right)=2\left(\pi\int_0^5\frac{9}{25}\left(25-x^2\right)\mathrm{d}x-\pi\int_0^3\left(9-x^2\right)\mathrm{d}x\right)=24\pi.$$

Câu 2. **[2D3-2.3-4] (Ngô Quyền Hà Nội)** Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x=a\pi+b\ln 2$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $T=16a-8b$?

A. $T=4$. **B.** $T=5$. **C.** $T=2$. **D.** $T=-2$.

Lời giải

Tác giả: Hoàng Quang Chính; Fb: quangchinh hoang

Chọn A

Đặt $A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{2\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

Đặt: $\begin{cases} u=x\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x\Rightarrow v=\tan x \end{cases}$.

Khi đó:

$$A=\frac{1}{2}\left[x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{2}\left[\left(x\tan x+\ln\left|\cos x\right|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\right)$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2.$$

Vậy $a=\frac{1}{8}$, $b=\frac{-1}{4}$ và $16a-8b=2+2=4$.

Câu 3. **[2D3-2.3-4] (CỤM TRẦN KIM HƯNG - HƯNG YÊN NĂM 2019)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;4\right]$ và thỏa mãn điều kiện $4xf\left(x^2\right)+6f\left(2x\right)=\sqrt{4-x^2}$. Tính tích phân $\int_0^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{\pi}{5}$. **B.** $I=\frac{\pi}{2}$. **C.** $I=\frac{\pi}{20}$. **D.** $I=\frac{\pi}{10}$.

Lời giải

Tác giả:Cao Thị Nguyệt; Fb:Chuppachip

Chọn A

Ta có $4xf\left(x^2\right)+6f\left(2x\right)=\sqrt{4-x^2}\Rightarrow\int\limits_0^2\left(4xf\left(x^2\right)+6f\left(2x\right)\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x\Leftrightarrow 4I_1+6I_2=I$.

Trong đó

$$I_1=\int\limits_0^2\left(xf\left(x^2\right)\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 f\left(x^2\right)\mathrm{d}\left(x^2\right)=\frac{1}{2}\int\limits_0^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x$$

$$I_2=\int\limits_0^2\left(f\left(2x\right)\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 f\left(2x\right)\mathrm{d}\left(2x\right)=\frac{1}{2}\int\limits_0^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x$$

$$I=\int\limits_0^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2\left(t\right)}.\cos\left(t\right)\mathrm{d}t=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\left(t\right)\mathrm{d}t$$

$$=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos\left(2t\right)\right)\mathrm{d}t=\left(2t+\sin\left(2t\right)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi.$$

Khi đó ta có hệ $\begin{cases}I_1=I_2\\4I_1+6I_2=\pi\end{cases}\Leftrightarrow I_1=I_2=\frac{\pi}{10}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\int\limits_0^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{10}$ hay $\int\limits_0^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{5}$.

Câu 4. **[2D3-2.3-4] (Sở Phú Thọ)** Cho tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(sinx+2\cos x)}{cos^2x}dx=a\ln 3+b\ln 2+c.\pi$ (với a,b,c là các số hữu tỉ). Giá trị biểu thức abc bằng.

A. $\frac{15}{8}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{5}{4}$. **D.** $\frac{17}{8}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Tỉnh; Fb: Nguyễn Văn Tỉnh

Chọn A

Đặt $\begin{cases}u=\ln(\sin x+2cosx)\\dv=\frac{dx}{cos^2x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{cosx-2\sin x}{\sin x+2cosx}dx\\v=\tan x\end{cases}$

Khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\sin x+2cosx)}{cos^2x}dx=\tan x.\ln(\sin x+2cosx)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x.\frac{cosx-2\sin x}{\sin x+2cosx}dx$

$$=\ln\frac{3\sqrt{2}}{2}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x.\frac{1-2\tan x}{\tan x+2}dx=\ln\frac{3\sqrt{2}}{2}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2\tan x-5+\frac{10}{\tan x+2}\right)dx$$

$$=\ln 3-\frac{1}{2}\ln 2-\left(2\ln cosx+5x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+10\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{cosx}{\sin x+2cosx}dx=\ln 3+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5\pi}{4}+10\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{cosx}{\sin x+2cosx}dx$$

Xét tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{cosx}{sinx+2cosx}dx = \frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\left(cosx-2sinx\right)+2\left(sinx+2cosx\right)}{\left(sinx+2cosx\right)}dx$

$$= \frac{1}{5}\left(\ln\left(sinx+2cosx\right)+2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{5}\left(\ln\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{2}-\ln 2\right) = \frac{1}{5}\left(\ln 3-\frac{3}{2}\ln 2+\frac{\pi}{2}\right)$$

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x+2cosx)}{cos^2 x}dx = \ln 3+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5\pi}{4}+2(\ln 3-\frac{3}{2}\ln 2+\frac{\pi}{2}) = 3\ln 3-\frac{5}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}$

Vậy $a=3, b=-\frac{5}{2}, c=-\frac{1}{4} \Rightarrow abc=\frac{15}{8}$.