

7 класс, 2009 год

1. В ящике имелись апельсины и лимоны, причём число лимонов составляло $\frac{1}{3}$ числа апельсинов. Когда из ящика достали 7 лимонов и 15 апельсинов, то число лимонов составило $\frac{1}{5}$ от числа оставшихся апельсинов. Сколько лимонов и сколько апельсинов было в ящике?

2. Расшифруйте числовой ребус $АЛЛО \cdot Я = ЭЛЛА$, в котором буквами А, Л, О, Э, Я обозначены различные нечётные цифры.

3. В корзине лежат подосиновики и подберезовики – всего 30 штук. Известно, что, какие бы 12 грибов ни достать из корзины, среди них окажется по крайней мере один подосиновик. А если произвольно достать 20 грибов, то среди них будет по крайней мере один подберезовик. Сколько подосиновиков в корзине?

4. Про некоторый треугольник ABC известно, что на его стороне BC существует такая точка D , что $AD = BD$ и $AB = DC = AC$. Найдите углы этого треугольника.

5. Эта игра является самым простым из многочисленных вариантов древней восточной игры Ним. На столе лежит куча камешков. Каждый игрок по очереди берёт из кучи от 1 до 3 камешков. Выигрывает тот, кто последним сделает ход. В одном из розыгрышей победил тот игрок, который ходил первым, причем он был уверен в выигрыше с самого начала. Определите, какая была куча - 32 камешка, 36 камешков, или 54 камешка? Объясните свое решение.

6. Натуральные числа m и n удовлетворяют равенству

$$(m - n)^2 = \frac{4mn}{m + n - 1}.$$

Докажите, что сумма $m + n$ – квадрат натурального числа.

Решения 7 класс, 2009 год

1. Ответ: 10 лимонов и 30 апельсинов.

Пусть в ящике было x штук лимонов, тогда по условию апельсинов в нём было $3x$ штук. Согласно условию получаем уравнение $x - 7 = \frac{1}{5} \cdot (3x - 15)$, из которого находим, что $x = 10$. Поэтому в ящике было 10 лимонов и $3 \cdot x = 30$ апельсинов.

Примечание: задача может быть решена и арифметическим способом

2. Ответ: А = 1, Л = 9, О = 7, Э = 5, Я = 3.

Если бы цифра Я = 1, то тогда число АЛЛО и ЭЛЛА должны совпадать, т.е. верны равенства О = А = Э, но это по условию не так. Следовательно, Я > 1, то есть, поскольку Я – нечётная цифра, Я ≥ 3. Цифра А не может быть больше 1. В самом деле, если А > 1, а Я ≥ 3, то А · Я ≥ 3 · 5 = 15, тогда АЛЛО · Я не было бы четырёхзначным числом, что противоречит условию. Следовательно, А = 1 и 1ЛЛО · Я = ЭЛЛ1. Из этого равенства следует, что произведение О · Я заканчивается 1. Из всех произведений нечётных цифр только произведение 3 · 7 заканчивается 1. Поэтому О и Я – это различные из цифр 3 и 7, значит Э и Л – это различные из цифр 5 и 9. Рассматривая возможные варианты, находим, что единственно верное равенство 1997 · 3 = 5991. Поэтому Э = 5, Л = 9.

3. Решение. Подберезовиков в корзине не более 11 штук. В самом деле, если бы их было не менее 12, то условие задачи, что среди любых 12 грибов имеется хотя бы 1 подосиновик, не было бы выполнено. По аналогичной причине подосиновиков в корзине не более 19 штук. Если бы подосиновиков в корзине было меньше 19 штук, то всех грибов в корзине было бы не больше, чем 11 + 18 = 29, но это противоречит, что в корзине 30 грибов. Значит, подосиновиков в корзине ровно 19.

4. Ответ: 36°; 36°; 108°.

Обозначим через x величину угла $\angle DAB$. Так как $\triangle ABD$ равнобедренный ($AD = BD$ по условию), то $x = \angle DBA = \angle DAB$. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle ADC = \angle DAB + \angle DBA = 2x$. Так как $\triangle ADC$ равнобедренный ($AC = DC$ по условию), то $\angle DAC = \angle ADC = 2x$. Следовательно, так как сумма углов треугольника равна 180°, из $\triangle ACD$ найдем $\angle ACD = 180^\circ - 4x$. Так как по условию $AB = AC$, то $\angle ABD = \angle ACD$, или $x = 180^\circ - 4x$. Отсюда $x = 36^\circ$. Углы треугольника ABC равны 36°; 36°; 108°.

5. Решение. Правильная стратегия - всегда оставлять в куче число камешков, кратное четырём. Выигрывает начинающий игрок в том случае, если в куче 54 камешка. Первым ходом он берет два камешка, а затем, если соперник при ходе берет n камешков, он всегда должен брать $4 - n$. Если же в куче 32 или 36 камешков, при правильной игре соперника начинающий проигрывает.

6. Решение: Действительно,

$$(m-n)^2 = \frac{4mn}{m+n-1} \Leftrightarrow (m+n-1)(m-n)^2 = 4mn \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m+n)(m-n)^2 - (m-n)^2 = 4mn \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m+n)(m-n)^2 = 4mn + m^2 - 2mn + n^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m+n)(m-n)^2 = (m+n)^2 \Leftrightarrow (m+n) = (m-n)^2,$$

то есть $m+n$ действительно является квадратом.

