

I. La proposition :

🔗 **Activité ①:**
Mettre une croix (×) dans la case qui convient.

Textes mathématiques	Vrai	Faux	On ne peut pas décider sa vérité
□ "10×2 + 15 = 35"			
▢ 15×2			
▢ − 4≥12			
▢ "√9 = 3"			
□ "7 est un nombre pair"			
▢ "√16 + 9 = √16 + √9"			

▢▢ **Définition:**
Une proposition est un texte mathématique qui a un sens pouvant être vrai ou faux mais pas les deux en même temps.
On note souvent une proposition par les lettres P, Q ou R ...

▢ **Exemples :**

- "4 > 3 " : _____
- "2 + 2 = 5 " : _____
- " Tout carré est un rectangle" : _____

▢▢ **Définition :**
Une fonction propositionnelle est un texte mathématique qui comprend une ou plusieurs variables et qui est vrai pour certaines valeurs attribuées à ces variables et faux dans les autres cas.

▢ **Exemples :**

- $P(x)$: " $x \in \mathbb{R}, x > 5$ " : _____
- (x, y) : " $x - y = 4$ " : _____

II. Les quantificateurs :

1. Quantificateur universel :

▢▢ **Définition :**
Soit $P(x)$ une fonction propositionnelle tel que x est un élément d'un ensemble E .
Si $P(x)$ est vraie pour tout élément de E on écrit : $(\forall x \in E): P(x)$.
• Le symbole " $\forall$ " s'appelle *quantificateur universel* et il se lit : *pour tout* ou *quel que soit*.

▢ **Exemples :**

- $(\forall x \in \mathbb{R}): x^2 \geq 0$: _____
- $(\forall x \in \mathbb{R}): x^2 \geq x$: _____
- $(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}): x + y = 2$: _____

2. Quantificateur existentiel :

▢▢ **Définition :**
Soit $P(x)$ une fonction propositionnelle tel que x est un élément d'un ensemble E .
S'il existe au moins un élément de E pour lequel $P(x)$ est vraie on écrit : $(\exists x \in E): P(x)$.
• Le symbole " $\exists$ " s'appelle *quantificateur existentiel* et il se lit : *il existe au moins*.

▢ **Exemples :**

- $(\exists x \in \mathbb{R}): x^3 = 8$: _____
- $(\exists x \in \mathbb{R}): x^2 = - 2$: _____

🔗 **Application ①:**
Ecrire les propositions suivantes à l'aide des quantificateurs :

- P_1 : "Quel que soit n un entier naturel : $n \geq 0$ ".
- P_2 : "Pour tout x de $[2; + \infty[$: $x - 2 \geq 0$ ".
- P_3 : "Il existe au moins deux nombres réel a et b tels que : $a \times b = 4$ ".
- P_4 : "Il existe au moins un élément x de $\mathbb{Z}$ tel que : $x^2 - x = 0$ ".

🔗 **Solution :**

III. OPERATIONS SUR LES PROPOSITIONS :

1. La négation d'une proposition :

▢▢ **Définition :**
La négation d'une proposition P , noté $\overline{P}$ ou $\neg P$, est la proposition qui vraie si P est fausse et qui est fausse si P est vraie.

P	$\overline{P}$	Ce tableau est appelé le tableau de vérité de la négation

--	--	--

□ Exemples :

La proposition P	La proposition $\bar{P}$
• $3 > 2$	•
• $(-2)^2 = -4$	•
• $-3 \in \mathbb{N}$	•

□□ Propriété :

- La négation de la proposition : " $(\forall x \in E) : P(x)$ " est : _____.
- La négation de la proposition : " $(\exists x \in E) : P(x)$ " est : _____.
- La négation de la proposition : " $(\forall x \in E)(\exists y \in E) : P(x, y)$ " est : _____.
- La négation de la proposition : " $(\exists x \in E)(\forall y \in E) : P(x, y)$ " est : _____.

□ Remarque :

Le symbole	>	<	≥	≤	=	∈
Sa négation						

□ Exemples :

- La négation de $(\forall x \in \mathbb{R}) : x \geq 1$ est : _____.
- La négation de $(\exists n \in \mathbb{N}) : \sqrt{n} \in \mathbb{N}$ est : _____.
- La négation de $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + x + 1 \geq 0$ est : _____.
- La négation de $(\forall n \in \mathbb{N}) (\exists m \in \mathbb{N}) : m \geq n$ est : _____.

2. La disjonction

□□ Définition :

La disjonction de deux propositions P et Q est la proposition qui est vraie si au moins l’une des deux propositions est vraie on la note **P ou Q** ou **$P \vee Q$** .

Tableau de vérité de P ou Q :

P	Q	P ou Q

□ Exemples :

- " $(-5 \geq 2)$ ou $(5 \geq 2)$ " : _____
- " $(3 + 2 = 6)$ ou $(-3 \geq 1)$ " : _____
- " $(-5 \in \mathbb{R})$ ou $(3 \text{ divise } 12)$ " : _____

3. La conjonction

□□ Définition :

La conjonction de deux propositions P et Q est la proposition qui est vraie uniquement si les deux propositions P et Q sont vraies en même temps on la note : **P et Q** ou **$P \wedge Q$** .

Tableau de vérité de $(P$ et $Q)$:

P	Q	P et Q

□ Exemples :

- " $(-5 \geq 2)$ et $(5 \geq 2)$ " : _____
- " $(3 + 2 = 6)$ et $(-3 \geq 1)$ " : _____
- " $(-5 \in \mathbb{R})$ et $(3 \text{ divise } 12)$ " : _____

✍ Application ②:

Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

- P_1 : (3 est impair) et $(3 = 5)$.
- P_2 : $(4 \times 8 = 20)$ ou (10 est pair) .
- P_3 : $(9 - 3 = 6)$ et $(-1 \in \mathbb{Z})$.
- P_4 : $(-4 \in \mathbb{N})$ ou $(\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > 0)$.

✍ Solution :

✍ Application ③:

Montrer que : $2 \leq x \leq 3 \Rightarrow 3 \leq 2x - 1 \leq 5$.

✍ Solution :

□ Remarques :

Soient P et Q deux propositions.

- La négation de $(P \text{ et } Q)$ est -----.
- La négation de $(P \text{ ou } Q)$ est -----.

□ Exemples :

- La négation de « $(0 \geq 2)$ et $(1 + 5 = 3)$ » est : -----.
- La négation de « $(5 \in \mathbb{N})$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}: x^2 > 0)$ » est : -----.

4. L'implication

□□ Définition :

L'implication de deux propositions P et Q est la proposition qui est fausse seulement dans le cas P est vraie et Q est fausse. On la note par $P \Rightarrow Q$ et se lit : P implique Q .

Tableau de vérité de $P \Rightarrow Q$:

P	Q	$P \Rightarrow Q$

□□ Définition :

L'équivalence de deux propositions P et Q est la proposition $(P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow P)$ qu'on note par $P \Leftrightarrow Q$ et se lit « P est équivalente à Q » ou bien « P si et seulement si Q ».

- $P \Leftrightarrow Q$ est vraie seulement si P et Q ont même valeur de vérité.

Tableau de vérité de $P \Leftrightarrow Q$:

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$

□ Exemples :

- " $2 > 1 \Rightarrow 2 + 3 = -1$ ": -----
- " $3 \times 2 = 9 \Rightarrow 5 - 1 = 20$ ": -----
- " $(3^2 = 9) \Rightarrow 4 - 1 = 3$ ": -----
- " $2 < 0 \Rightarrow 2 + 3 = 5$ ": -----

□ Remarques :

- o $P \Rightarrow Q$ signifie : si P est vraie alors Q est vraie.
- o L'implication $Q \Rightarrow P$ est appelé **l'implication réciproque** de l'implication $P \Rightarrow Q$.
- o Les propositions $P \Rightarrow Q$ et $(\bar{P} \text{ ou } Q)$ ont la même valeur de vérité.

□ Exemple :

" $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ " signifie :

□ Exemple :

Soient a et b deux nombres réels. On a :

$$ab = 0 \Leftrightarrow \text{-----}$$

✍ Application ④:

Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

- ② P_1 : $3 \text{ est impair} \Leftrightarrow 3 = 5$.
- ② P_2 : $4 \times 8 = 20 \Leftrightarrow 10 \text{ est pair}$.
- ② P_3 : $-1 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 9 - 3 = 6$.
- ② P_4 : $-4 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}): x^2 + 1 > 0$.

✍ Solution :

IV. Les raisonnements mathématiques

1. Raisonnement par équivalence :

□ *Exemples :*

Montrer que :

$$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}) : a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow a = b.$$

2. Raisonnement par disjonction des cas :

□ *Exemple :*

Résoudrons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $|x| + 5 = 3x$.

3. Raisonnement par l'absurde :

□ *Exemple :*

Montrons que 0 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{R}$.

