

3.4 Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

ΘΕΜΑ Β

$$A = \frac{\eta\mu(180^\circ - 20^\circ) \cdot \sigma\upsilon\nu(-3x)}{\sigma\upsilon\nu(90^\circ - 20^\circ)}$$

1. (21235) Δίνεται η παράσταση

α) Να δείξετε ότι $A = \sigma\upsilon\nu 3x$. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την μέγιστη τιμή και την περίοδο της συνάρτησης $f(x) = \sigma\upsilon\nu 3x$. (Μονάδες 12)

2. (20867) Δίνεται η παράσταση $A = \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x$.

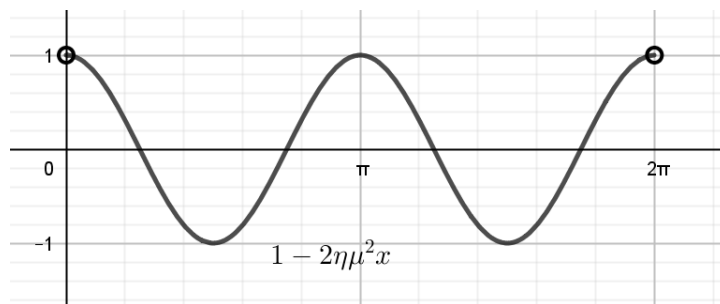
α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A για $x = 0$. (Μονάδες 7)

β) Να δείξετε ότι $A = 1 - 2\eta\mu^2 x$.

(Μονάδες 9)

γ) Με χρήση της παρακάτω γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τύπο $1 - 2\eta\mu^2 x$ και του ερωτήματος β),

να λύσετε την εξίσωση $A = 1$, για $0 < x < 2\pi$. (Μονάδες 9)



3. (20807) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\pi + x) + \eta\mu(-x)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -2\eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε την περίοδο αυτής. (Μονάδες 12)

β) i) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x) = -2\eta\mu x$					

(Μονάδες 6)

ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $0 \leq x \leq 2\pi$.

(Μονάδες 7)

4. (20660) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\pi - x) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2\eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 12)

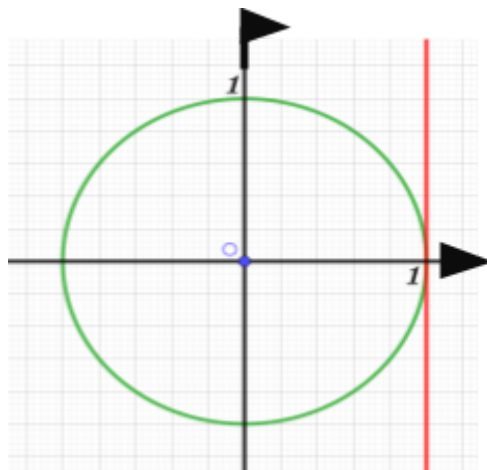
β) i) Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f . (Μονάδες 6)

ii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f για $0 \leq x \leq 2\pi$. (Μονάδες 7)

5. (16131) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$, $x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$, όπου $k \in \mathbb{Z}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$. (Μονάδες 15)

β) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας το παρακάτω σχήμα, στο οποίο να παραστήσετε τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης. (Μονάδες 10)



6. (15810) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της g . (Μονάδες 6)

β) i) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$g(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$					

(Μονάδες 10)

ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της g σε διάστημα μίας περιόδου. (Μονάδες 9)

7. (15809) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

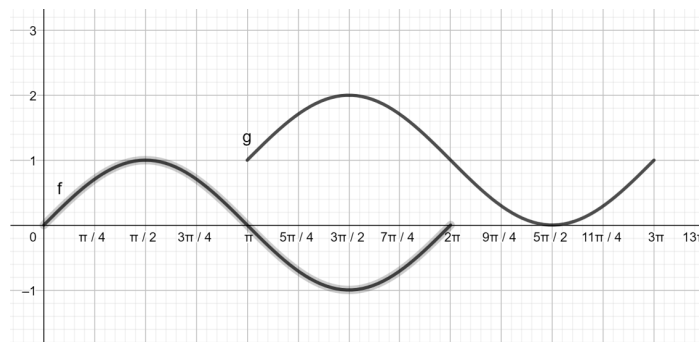
α) Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f . (Μονάδες 6)

β) i) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$f(x) = \eta\mu 2x$					

ii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα μίας περιόδου. (Μονάδες 9)

8. (15788)



Στο παραπάνω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$

και η γραφική παράσταση της συνάρτησης g που προέκυψε από την f με δύο διαδοχικές μετατοπίσεις. Με την βοήθεια του σχήματος να βρείτε:

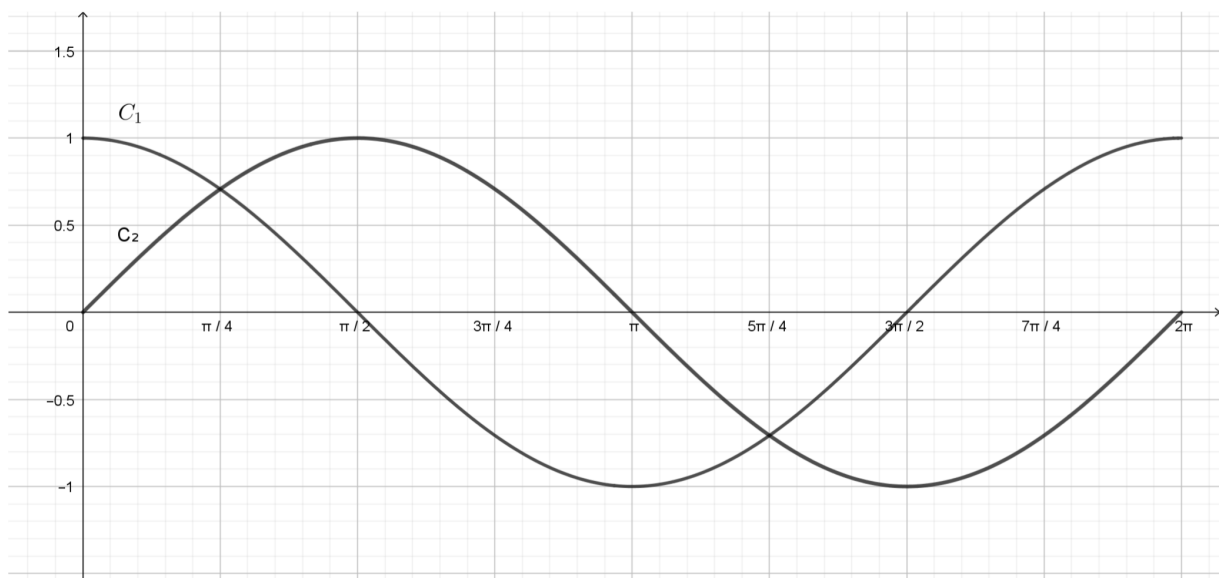
α) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g , την μέγιστη τιμή της και σε ποια θέση την αποκτά. (Μονάδες 13)

β) i) τις δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της f από τις οποίες προέκυψε η g . (Μονάδες 6)

ii. τον τύπο της g . (Μονάδες 6)

9. (15644) Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε σχεδιάσει δύο γραφικές παραστάσεις C_1 και

C_2 για $x \in [0, 2\pi]$.



- α) Αν οι γραφικές παραστάσεις είναι των συναρτήσεων $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = \eta\mu x$ για $x \in [0, 2\pi]$, ποια από τις C_1 , C_2 είναι η γραφική παράσταση της $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και ποια της $g(x) = \eta\mu x$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)
- β) Με την βοήθεια του σχήματος να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$. (Μονάδες 15)

10. (15172) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4\eta\mu(11\pi - x)$, $x \in \mathbb{R}$

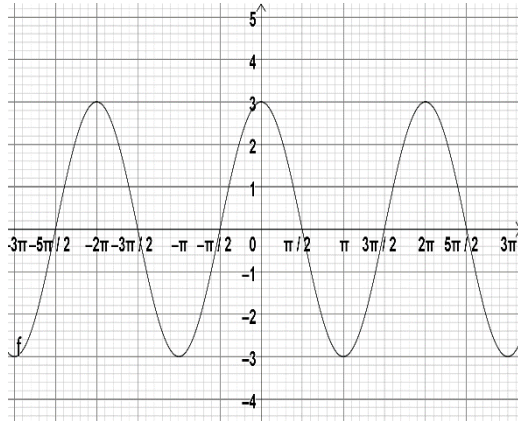
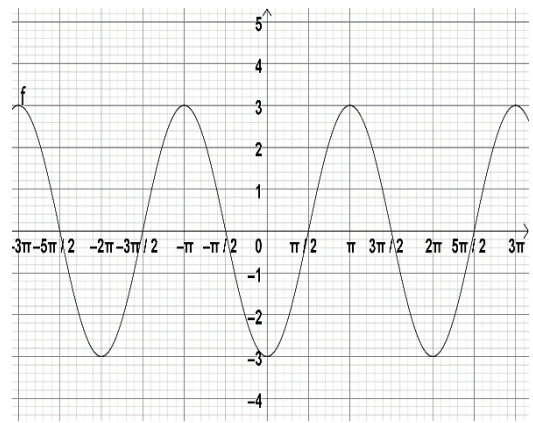
- α) Να δείξετε ότι: i) $\eta\mu(11\pi - x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$. ii) $f(x) = 4\eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 6/4)
- β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 4\eta\mu x$, όταν $x \in [0, 2\pi]$. (Μονάδες 15)

11. (15091) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) i) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης. (Μονάδες 7)
- ii) Να βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της. (Μονάδες 10)
- β) Να υπολογίσετε τον αριθμό $f(2025\pi)$. (Μονάδες 8)

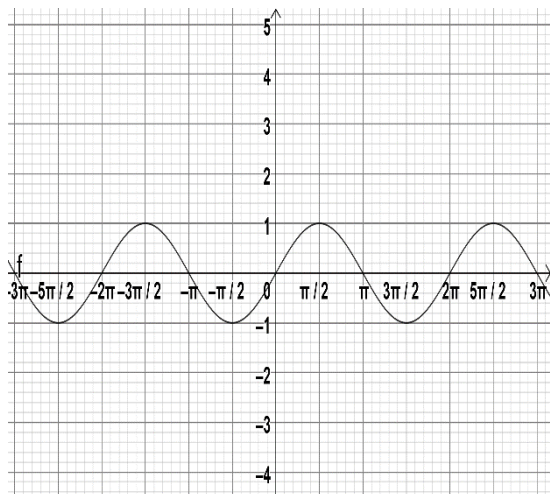
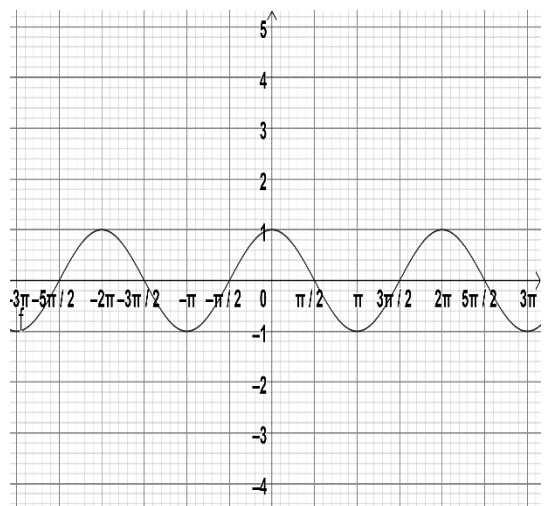
12. (15009) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3\sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f . (Μονάδες 8)
- β) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f . (Μονάδες 7)
- γ) Από τις παρακάτω τέσσερις γραφικές παραστάσεις μία μόνο αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της f , να επιλέξετε αυτή που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $f(x) = -3\sigma\upsilon\nu x$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- A) B)



Γ)

Δ)



(Μονάδες 10)

13. (22003) Δίδεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \eta\mu(2\pi x)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο $T = 1$.

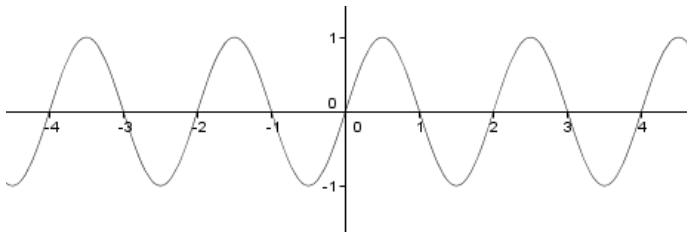
(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το $f(0)$ και το $f(\frac{1}{4})$.

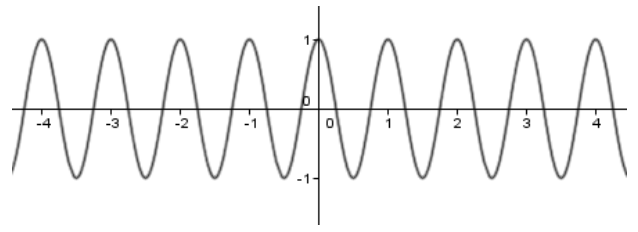
(Μονάδες 8)

γ) Μία από τις παρακάτω τέσσερις καμπύλες αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Ποια είναι αυτή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

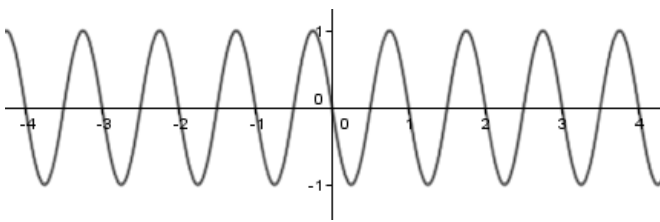
(Μονάδες 9)



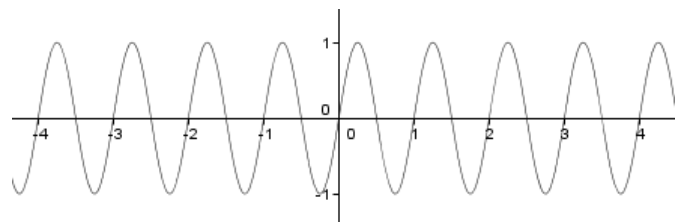
(Α)



(Β)

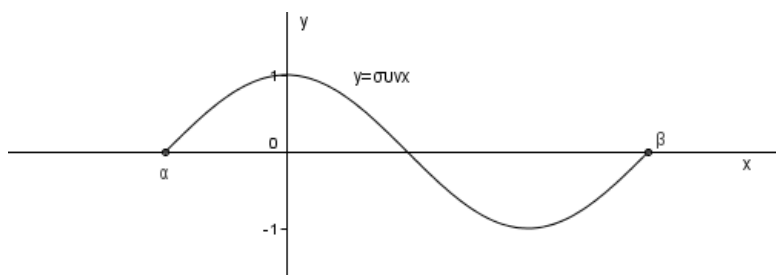


(Γ)



(Δ)

14. (22007) Στο σχήμα φαίνεται απόσπασμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\sin x$.



α) Να βρείτε τα α και β .

(Μονάδες 12)

β) Προς ποια κατεύθυνση και κατά πόσο πρέπει να μετατοπιστεί η παραπάνω καμπύλη ώστε να συμπίπτει με τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\eta \mu x$;

(Μονάδες 13)

15. (31569) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3\sigma\upsilon\nu 2x$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

(Μονάδες 12)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f σε διάστημα μιας περιόδου. (Μονάδες 13)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$\sin 2x$					
$f(x) = -3\sin 2x$					

16. (31568) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης; Ποια είναι η περίοδος της συνάρτησης f ; (Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου. (Μονάδες 13)

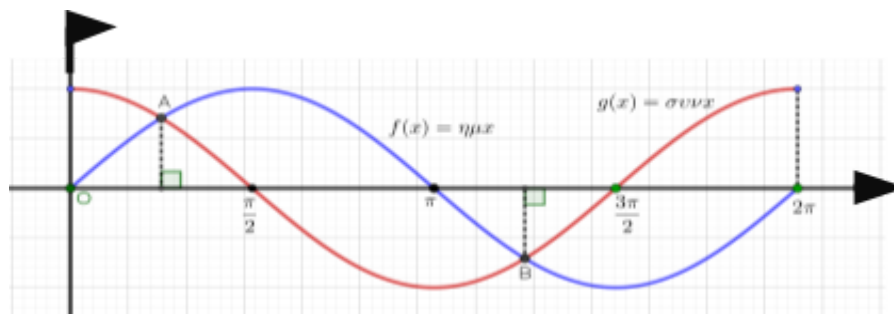
ΘΕΜΑ Γ

17. (15391) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [0, 2\pi]$.

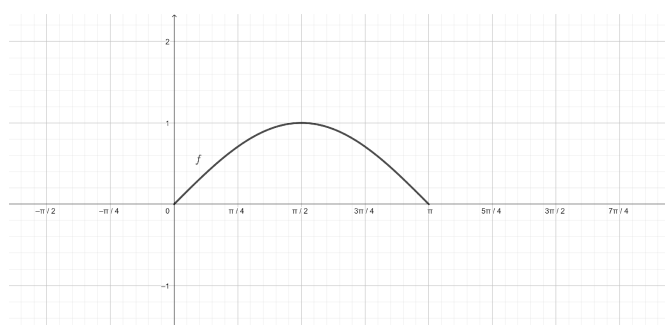
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης $g(x)$ στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ και την μονοτονία της συνάρτησης $f(x)$ στο $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$. (Μονάδες 4)

γ) Με την βοήθεια του ερωτήματος β) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να συγκρίνετε, με δικαιολόγηση, τους αριθμούς: i) $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ και $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$. ii) $\eta\mu\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ και $\eta\mu\left(\frac{11\pi}{6}\right)$. (Μονάδες 5/6)



18. (15789) Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$ με $x \in [0, \pi]$.



α) i) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και μετατοπίζοντας κατάλληλα την f να σχεδιάσετε την

$$g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

συνάρτηση (Μονάδες 8)

ii) Ποιος είναι ο τύπος της g και σε ποιο διάστημα ορίζεται; (Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Δ

19. (15025) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μια γωνία $\theta = \angle AOM$ με $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$, της οποίας η τελική πλευρά τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο M και την ευθεία $x = 1$ στο σημείο K .

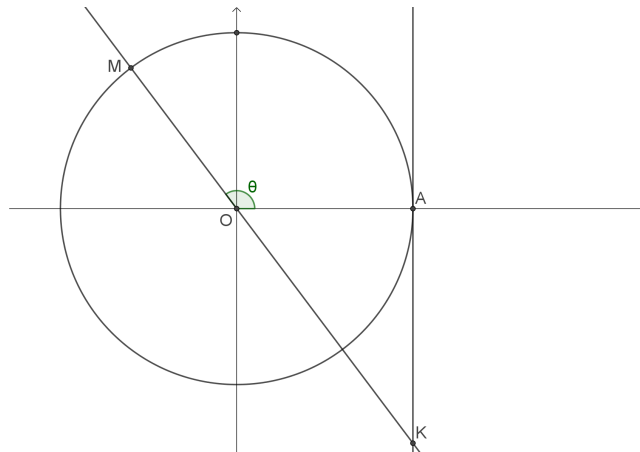
α) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\sigma\upsilon\nu\theta, \epsilon\phi\theta, \sigma\phi\theta$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M και K . (Μονάδες 6)

γ) Έστω μια γωνία $\phi \in [0, 2\pi]$ για την οποία ισχύει $\eta\mu\phi = \frac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu\phi < 0$.

i) Να βρείτε σε ποιο τεταρτημόριο έχει η γωνία ϕ την τελική πλευρά. (Μονάδες 5)

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί $\theta < \phi$. (Μονάδες 6)

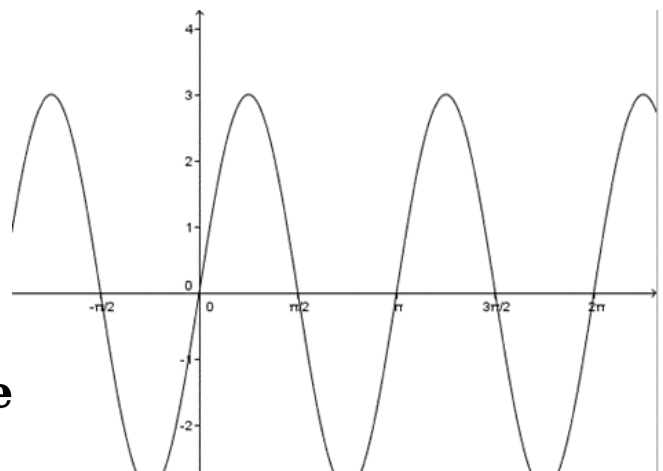


20. (15062) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι της μορφής

$$f(x) = a \sin(\rho x), \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad a, \rho > 0$$

α) Να βρείτε, με βάση το σχήμα, την περίοδο της, την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της. (Μονάδες 6)

β) Με βάση τις απαντήσεις στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε τους αριθμούς a και ρ . (Μονάδες 6)



Έστω $\rho = 3$ και $\alpha = 2$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = x^4 - 2x^2 + 5, x \in \mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με 4. (Μονάδες 7)

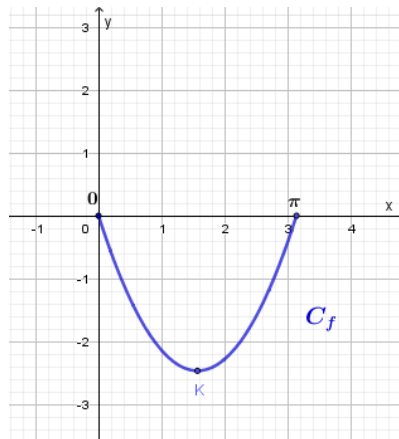
δ) Να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινό σημείο. (Μονάδες 6)

21. (15095) Οι εξισώσεις των γραμμών που αποτελούν την περίμετρο μιας επίπεδης μεμβράνης όπως

φαίνεται κάτω από ένα μικροσκόπιο, είναι: $x = 0$, $y = x^2 - \pi x$, $y = \frac{1}{2} + \eta\mu x$ και $x = \pi$

Η μεμβράνη πρόκειται να καλυφθεί με ένα γυάλινο ορθογώνιο πλακίδιο.

α) i) Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - \pi x, x \in [0, \pi]$ είναι το τμήμα της παραβολής που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η οποία παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $K\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi^2}{4}\right)$.



Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{2} + \eta\mu x, x \in [0, \pi]$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

(Μονάδες 5)

Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε τα ακρότατα των δύο συναρτήσεων και τα διαστήματα μονοτονίας τους. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την μέγιστη κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τις ελάχιστες διαστάσεις του ορθογώνιου πλακιδίου.

(Μονάδες 4)

22. (15422) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - 2\eta\mu(\pi + 2x)$ με $a > 0$, η οποία έχει μέγιστη τιμή το 4.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = (a + 2)\eta\mu 2x$.

(Μονάδες 5)

β) i) Να δείξετε ότι $a = 2$.

ii) Να βρείτε την περίοδο της f .

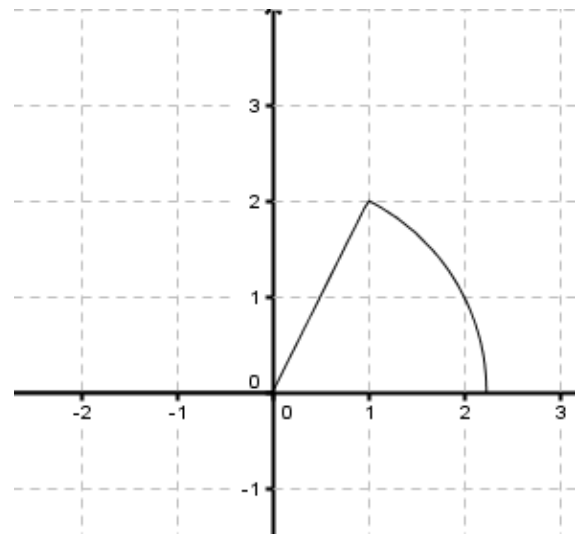
(Μονάδες 5/5)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f σε διάστημα μιας περιόδου.

(Μονάδες 5)

δ) Αν $g(x) = 5 - \sin^2 2x$, να βρείτε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία της C_f με την C_g , όπου C_f, C_g οι γραφικές παραστάσεις των f, g αντίστοιχα. (Μονάδες 5)

23. (15689) Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$. Στο διπλανό σχήμα δίνεται, για τις μη αρνητικές τιμές του x , η γραφική της παράσταση. Αν είναι γνωστό ότι η f είναι άρτια, τότε:



α) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση για τις αρνητικές τιμές του x . (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της, την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της. Για ποιες τιμές του x προκύπτουν οι ακρότατες τιμές της; (Μονάδες 8)

γ) Έστω θ ένας αριθμός με $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Να συγκρίνετε τους

αριθμούς: i) $\eta\mu\theta$ και $\sigma\upsilon\nu\theta$

ii) $f(\eta\mu\theta)$ και $f(\sigma\upsilon\nu\theta)$

(Μονάδες 5/5)

24. (15992) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \rho \eta\mu x$, $g(x) = \eta\mu(\omega x)$, όπου $\rho, \omega > 0$.

α) Να βρεθούν οι τιμές των ρ, ω , αν είναι γνωστό ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι -2 και η περίοδος της g είναι π . Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 6)

β) i) Να κάνετε, στο ίδιο σύστημα αξόνων, τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2\eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$ και $g(x) = \eta\mu(2x)$, $x \in [0, \pi]$.

(Μονάδες 10)

ii) Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι $2\eta\mu\frac{5\pi}{9} > \eta\mu\frac{10\pi}{9}$.

(Μονάδες 9)

25. (18234) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2$, $x \in [0, 2\pi]$.

α) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της. Για ποιες τιμές του x προκύπτουν αυτές; (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 6)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση. (Μονάδες 7)

δ) Αν για κάποιο αριθμό α με $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $f(\alpha) \neq \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

(Μονάδες 5)

26. (20870) Το βάθος y , σε μέτρα, του νερού σε ένα λιμάνι επηρεάζεται από το φαινόμενο της παλίνρροιας κατά τη διάρκεια μιας ημέρας (εντός 24 ωρών). Το πρώτο (μετά τα μεσάνυχτα) μέγιστο βάθος είναι $5,8$ μέτρα και συμβαίνει στις $3:00$ π.μ. Το πρώτο ελάχιστο βάθος είναι $2,6$ μέτρα και συμβαίνει στις

$9:00$ π.μ. Το βάθος y δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου t (σε ώρες) από τη σχέση: $y = \alpha \eta\mu(\omega t) + \beta$,

με $\alpha, \omega, \beta > 0$ και $0 \leq t \leq 24$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, ω και β . (Μονάδες 6)

β) Αν $\alpha = 1,6$, $\omega = \frac{\pi}{6}$ και $\beta = 4,2$,

i) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $y = 1,6 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 4,2$, με $0 \leq t \leq 24$. (Μονάδες 8)

ii) Ποιο θα είναι το βάθος του νερού στις 12 το μεσημέρι; (Μονάδες 4)

iii) Ένα μεγάλο πλοίο χρειάζεται τουλάχιστον 4,2 μέτρα βάθος νερού για να δέσει στο λιμάνι. Στη διάρκεια ποιού χρονικού διαστήματος από τις 12 το μεσημέρι και μετά θα μπορεί να δέσει με ασφάλεια; (Μονάδες 7)