

COMPOSITION DE PHYSIQUE

Vendredi 9 mai 1997 de 14 h à 17 h

La plus grande importance sera attachée à la présentation et à la rédaction.

Seuls seront corrigés les résultats encadrés répondant explicitement à la (les) question(s) posée(s), exprimé(s) avec les notations strictes de l'énoncé, sous leur forme la plus simple, en tenant compte de l'esprit de la question. Ceci se traduira par des points de minoration ne dépassant pas 10 % de la note.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

L'INFLUX NERVEUX

On compare souvent un nerf à un simple fil électrique, sur lequel se propagerait l'influx nerveux, commandant et contrôlant le corps. En réalité la propagation nerveuse est infiniment plus complexe. Ce problème se propose d'examiner quelques phénomènes (physiques) relatifs à cette propagation. Aucune connaissance en biologie et en médecine n'est nécessaire pour résoudre ce problème.

Données numériques :

- * Constante de Boltzmann
- * Température (en °C) = température T(en K)
- * Permittivité électrique du vide .
- * Charge électrique élémentaire
- * Température moyenne interne du corps humain

Rappels de cours :

Capacité d'un condensateur .

On considère une population de particules à l'équilibre thermique, les particules pouvant avoir une énergie potentielle de valeurs ou . La loi de Boltzmann prévoit que le nombre de particules ayant l'énergie est $=$ où A est une constante de normalisation.

A. Fibres nerveuses, description

Les cellules nerveuses (neurones) présentent toutes, quel que soit l'animal, deux extrémités : le corps cellulaire et le bouton synaptique et entre les deux une fibre plus ou

moins longue appelée axone. Cet axone baigne dans le milieu extérieur formé de liquide interstitiel. L'axone comprend un axoplasme et une membrane bilipidique.

Axone

Les caractéristiques des fibres nerveuses sont dans le tableau ci-dessous :

Rayon extérieur de l'axone	a	5
Epaisseur de la membrane	b	7,0 nm
Permittivité diélectrique relative (membrane)		8
Résistivité (membrane)		$1,6 \cdot 10^7$
Résistivité (axoplasme)		0,5
Capacité/unité de surface (membrane)		
Conductance/unité de surface (membrane)		9
Résistance/unité de longueur (axoplasme)		$6 \cdot 10^9$

- A.1. On choisira des coordonnées cylindriques avec une base orthonormée directe, l'axe z correspondant avec l'axe de l'axone (axe de symétrie).

On admet qu'il existe une différence de potentiel uniforme et constante entre l'axoplasme et le liquide interstitiel. On suppose que la paroi interne de la membrane porte une densité surfacique de charge uniforme égale à σ (positive ou négative).

On admettra que les calculs de champ dans un milieu diélectrique linéaire, homogène et isotrope sont identiques à ceux effectués dans le vide, à condition de remplacer ϵ_0 par ϵ .

- a) Calculer le champ électrique qui règne dans la membrane en fonction de σ .

- a) Déterminer σ en fonction de ϕ .
En déduire la charge portée sur une longueur L de membrane.

- a) Comparer a et b, simplifier alors les expressions de σ et Q.

- a) Déterminer alors C (capacité par unité de surface de la membrane).
Application numérique.
Le résultat est-il conforme à celui du tableau ?

- a) Sachant que ϵ donner le signe de E et préciser sa valeur numérique. Quelle est l'intensité du champ électrique existant dans la membrane ?

A.2. La membrane est un milieu légèrement conducteur, de résistivité ρ .

- a) Calculer la résistance de fuite de cette membrane pour une longueur L .
- b) Déterminer la conductance surfacique de la membrane. Pourquoi s'intéresse-t-on à la conductance surfacique et non à la résistance surfacique ?
- c) Application numérique.
Le résultat est-il conforme à celui du tableau ?

A.3. On modélise alors la membrane par le circuit suivant :

- a) Justifier ce schéma.
- a) Quelle est la constante de temps τ de ce circuit ? Cette constante de temps sera exprimée en fonction de ρ et ϵ .
- a) Que représente physiquement cette constante de temps ?
- a) Application numérique. (On utilisera les données du tableau fournies au début du problème).
- e) En régime stationnaire la différence de potentiel existe en permanence. Justifier alors qu'il est indispensable qu'un mécanisme de renouvellement des charges soit mis en oeuvre.

A.4. On considère maintenant l'axoplasme.

- a) Calculer la résistance (longitudinale) de l'axoplasme sur une longueur L d'axone.
- b) Calculer numériquement la résistance par unité de longueur de l'axoplasme.

A.5. On définit la longueur critique comme la longueur de l'axone telle que la résistance (longitudinale) de l'axoplasme soit égale à celle (de fuite) de la membrane.

- a) Exprimer la longueur critique L_c en fonction de ρ et ϵ .
- b) Faire l'application numérique. (On utilisera les données du tableau).
- c) Pour certaines fibres entourées de myéline la résistance de la membrane est multipliée par un facteur 300, que devient cette longueur critique ?

d) Conclure alors sur l'impossibilité de transmettre un signal électrique par simple conduction dans l'axoplasme.

A.6. Pour expliquer la présence permanente de charges de part et d'autre de la membrane, on effectue des mesures complémentaires. On considère le liquide de part et d'autre de la membrane de l'axone. Pour une fibre au repos on observe des différences de concentration entre l'extérieur et l'intérieur, ces mesures sont consignées dans le tableau ci-dessous :

Ion	Concentration dans l'axoplasme (m mol.L ⁻¹)	concentration à l'extérieur (m mol.L ⁻¹)
	15	150
K ⁺	150	5,5
	9	125

- a) Quels sont les deux phénomènes pouvant expliquer la diffusion des ions à travers la membrane ? Préciser dans quel sens on peut prévoir cette diffusion. (On fera un tableau à 3 colonnes (une pour chaque ion) et à deux lignes (une pour chaque phénomène) en précisant clairement le sens possible de diffusion).
- b) On considère une charge q plongée dans un champ électrique, montrer qu'on peut définir une énergie potentielle (à une constante additive près) d'interaction entre cette charge et le champ par qV où V est le potentiel électrostatique du champ.
- c) Montrer alors que la mesure de la concentration en ions de part et d'autre de la membrane s'explique facilement.
- d) Reprendre le calcul précédent pour les ions Na⁺ et K⁺. (On déterminera par exemple le potentiel qui serait associé à l'équilibre thermique). Que devrait-il se passer ?

Ceci montre qu'il existe obligatoirement un dispositif pour maintenir l'état de non-équilibre appelé pompe et dont le mécanisme ne sera pas étudié ici.

A.7. Cette membrane est, en fait, constituée de microcanaux supposés cylindriques de diamètre pour le passage des ions. Entre ces microcanaux on suppose que la membrane est isolante. La résistivité du fluide dans les canaux est 100 fois plus grande que celle de l'axoplasme.

Compte-tenu des résultats obtenus en A.2. :

- a) Déterminer le nombre de canaux par unité de surface. Faire l'application numérique.
- b) Calculer la distance moyenne entre deux canaux.

B. Réponses à un stimulus

On a étudié dans la partie A les propriétés de la fibre nerveuse en régime statique, dans les deux parties suivantes on étudie la transmission d'une perturbation dans la fibre.

Il est possible d'effectuer des mesures sur une fibre si celle-ci est suffisamment grosse pour y introduire des électrodes. Le principe est illustré sur la figure ci-dessous.

On constate que pour des faibles modifications de tension (de ± 1 à ± 5 mV) donc il n'y a pas de propagation possible. Au contraire si il y a propagation. On étudie dans cette partie B les perturbations faibles (stimulus faible).

B.1. On donne le circuit représenté ci-dessous :

- a) Donner sa fonction de transfert , en régime sinusoïdal forcé.
- b) Donner l'équation différentielle reliant les deux tensions.
- c) On applique à $t > 0$ une perturbation constante , à partir d'un état de repos, comment obtient-on i et v ?
- d) Tracer la courbe i et v .

B.2. On donne le circuit suivant :

- a) Donner sa fonction de transfert .
- b) Donner l'équation différentielle reliant les deux tensions.
- c) Tracer la courbe i pour la même perturbation appliquée. Comparer avec la courbe précédente.

B.3.

Donner sans calcul, en justifiant brièvement, l'allure des courbes
(Les condensateurs ont tous même capacité C).

On étudiera plus particulièrement les valeurs d'équilibre et le comportement en haute fréquence.

- B.1. Equation de propagation. Le modèle précédent permet de comprendre pourquoi un signal ne peut se propager, on envisage dans cette question une description plus réaliste.

On considère une tranche d'axone comprise entre la cote z et la cote $z + dz$. On note par i l'intensité du courant circulant dans le sens de l'axe Oz dans l'axoplasme et par i_m l'intensité du courant circulant dans la membrane de l'axone vers l'extérieur (entre z et $z + dz$). On choisit donc une description électrique à constantes réparties de l'axone.

En appliquant les lois générales de l'électrocinétique, établir l'équation de propagation de la tension. Cette équation de propagation sera exprimée avec $V(z,t)$ (potentiel dans l'axoplasme), $V_m(z,t)$ (potentiel dans le liquide à l'extérieur de l'axone).

On admettra que pour les faibles variations de V la membrane obéit à la loi d'Ohm.

- B.1. On étudie l'équation précédente en régime stationnaire, donner alors la solution possible $V(z)$. Tracer les courbes $V(z) = f(z)$ et représente la densité surfacique de courant membranaire que l'on définira).
- B.1. Hodgkin et Huxley ont réalisé l'expérience suivante, permettant d'imposer à l'axone le même potentiel quel que soit z et ainsi d'étudier V en fonction du temps t . En insérant une électrode le long de l'axone, on garantit un potentiel V indépendant de z . Une excitation donnera ainsi une variation de potentiel transmembranaire ne dépendant que du temps t .

Le circuit permet d'imposer une tension à puis de basculer l'interrupteur K de sorte que la tension $v(t)$ soit ensuite aux bornes de la résistance R .

Etudier la solution $v(t)$ pour $t > 0$ à partir de l'équation de propagation. Retrouver ainsi la constante de temps définie dans la partie A.

C. Propagation d'un potentiel d'action

On montre que lorsque la tension d'excitation dépasse 20 mV, un phénomène de propagation à grande distance se produit. Cette impulsion de tension s'appelle potentiel d'action.

La propagation du potentiel d'action sur l'axone, consiste en une dépolarisation de la membrane qui se propage de proche en proche.

Lorsque la perturbation arrive en un point de la membrane, la perméabilité de celle-ci aux ions Na^+ augmente. Les ions Na^+ la traversent et le potentiel lié à la densité de charge surfacique augmente (voir le point A sur les figures ci-dessous). A partir du point B (potentiel nul), les charges s'inversent (dépolarisation de la membrane). Le flux d'ions K^+ augmente, alors que celui des ions Na^+ diminue et la membrane se repolarise lorsque le potentiel d'action retombe à la valeur 0 (point D).

Evolution de l'état de la membrane au cours du temps

Le potentiel d'action en mouvement associe :

- une onde électrique mesurée par $V(z,t)$,
- une onde de perméabilité de la membrane mesurée par les conductances surfaciques et restant constant.
- une onde de dépolarisation de la membrane correspondant à un dipôle se déplaçant à la vitesse v .

- C.1. Reprendre l'équation de propagation (établie dans la partie B) mais en tenant compte maintenant de ce que la membrane (toujours faiblement conductrice) n'obéit plus à la loi d'Ohm. On écrira cette équation de propagation en faisant intervenir la densité surfacique de courant de membrane.
- A.2. Le potentiel d'action $V(z,t)$ se propage sans déformation avec la vitesse v , à quelle équation aux dérivées partielles obéit nécessairement $V(z,t)$?
- A.3. En tenant compte des équations établies dans les questions C.1. et C.2. trouver une équation à laquelle obéit $V(z,t)$ ne comprenant que des dérivées temporelles et aucune dérivée spatiale.
- A.4. On donne le diagramme des conductances pour et . L'équation précédente peut-elle être résolue analytiquement ?
Comment peut-on alors la résoudre ?
- A.5. La vitesse peut s'écrire :
- a) En quelle unité s'exprime la constante k ?
 - b) Sachant que $k = 10^3$ u.S.I., calculer v .
- A.6. On peut comparer le phénomène de dépolarisation de la membrane de l'axone avec la réaction étudiée en électronique.
- a) Rappeler de manière succincte le système bouclé (à une seule boucle) en électronique.
 - b) Montrer comment la dépolarisation, le flux de Na^+ et celui de K^+ peuvent s'interpréter en terme de réaction.