

Correction du sujet d'analyse

Partie I

1. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$ donc la fonction $f = \tanh$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Par propriété des fonctions usuelles, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} > 0.$$

Donc f est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle réalise alors une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, $f(\mathbb{R})$ est un intervalle.

Enfin, grâce à la stricte croissance, $f(\mathbb{R}) =]\lim_{-\infty} f; \lim_{+\infty} f[$.

Or : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ donc $\lim_{+\infty} f = 1$; puis, comme f est impaire, $\lim_{-\infty} f = -1$.

On pose $I =]-1; 1[$. Donc $\tanh$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur I .

$$2. \text{ On a : } \forall x \in \mathbb{R}, (\tanh)'(x) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x}.$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, (\tanh)'(x) = 1 - \tanh^2 x$.

3. On sait que $\tanh$ est une fonction impaire. artanh est définie sur I qui est symétrique par rapport à zéro.

De plus, on a : $\forall x \in I, \tanh(\operatorname{artanh}(-x)) = -x$

$$= -\tanh(\operatorname{artanh}(x))$$

$$= \tanh(-\operatorname{artanh}(x)) \text{ car } \tanh \text{ est impaire.}$$

Puis, comme $\tanh$ est bijective, on en déduit que : $\forall x \in I, \operatorname{artanh}(-x) = -\operatorname{artanh}(x)$.

Donc la fonction artanh est impaire.

4. artanh est la réciproque de la fonction $\tanh$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Par théorème, on en déduit que artanh est dérivable sur I et que :

$$\forall x \in I, (\operatorname{artanh})'(x) = \frac{1}{(\tanh)'(\operatorname{artanh}(x))} = \frac{1}{1 - \tanh^2(\operatorname{artanh}(x))}.$$

Donc : $\forall x \in I, (\operatorname{artanh})'(x) =$

$$\frac{1}{1 - x^2}.$$

5. La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{1 - x^2}$ est continue sur I ; donc $G : x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{1 - t^2}$ est définie, continue et dérivable sur I ; c'est la primitive de g qui s'annule en zéro. Or $\tanh(0) = 0$ donc $\operatorname{artanh}(0) = 0$.

D'après le 4., on a donc : $\forall x \in I, \operatorname{artanh}(x) = \int_0^x \frac{dt}{1 - t^2}.$

Mais : $\forall x \in I, \frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x} \right)$. Donc : $\forall x \in I, \operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{1}{1 - t} + \frac{1}{1 + t} \right) dt$

$$\Leftrightarrow \operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} [-\ln|1 - t| + \ln|1 + t|]_0^x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right).$$

$$\text{Donc : } \forall x \in I, \operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

Remarque : On peut aussi obtenir directement artanh , en exprimant x en fonction de $\tanh(x)$.

6. La fonction g est de classe C^∞ sur I donc, d'après le théorème de Taylor-Young, elle admet un développement limité à tout ordre en zéro.

En particulier, à l'ordre 4, on obtient : $g(x) = 1 + x^2 + x^4 + o(x^4)$.

Puis, comme g est continue sur I , artanh , la primitive de g qui s'annule en zéro, admet un développement limité à l'ordre 5 en zéro obtenu en intégrant le développement limité précédent.

$$\operatorname{artanh}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

D'où, au voisinage de zéro, on a :

Partie II

7. Les fonctions $u : x \mapsto x$, $v : x \mapsto 3$ et $w : x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ sont continues sur J et u ne s'annule pas sur cet intervalle.

Par théorème, on sait qu'alors (E) admet une infinité de solutions sur J obtenues en additionnant à n'importe quelle solution sur J de l'équation homogène (H) : $xy' + 3y = 0$, associée à (E), une solution particulière de (E) sur J .

Posons : $\forall x \in J, A(x) = -3 \ln(x)$. Par théorème, les solutions de (H) sur J sont les fonctions de la forme :

$$y(x) = k e^{A(x)} \text{ où } k \in \mathbb{R} \text{ c'est-à-dire } y(x) = k e^{-3 \ln x} = \frac{k}{x^3} \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

Cherchons une solution particulière de (E) sur J par la méthode de variation de la constante.

On pose : $\forall x \in J, Y(x) = \frac{k(x)}{x^3}$ où k est une application dérivable sur J .

On a alors : $\forall x \in J, Y'(x) = -3 \frac{k(x)}{x^4} + \frac{k'(x)}{x^3}$.

Y est solution de (E) ssi

$$\forall x \in J, \quad x Y'(x) + 3Y(x) = \frac{1}{1-x^2} \Leftrightarrow \frac{k'(x)}{x^2} = \frac{1}{1-x^2} \Leftrightarrow k'(x) = \frac{x^2}{1-x^2} = -1 + \frac{1}{1-x^2}$$

On choisit : $\forall x \in J, k(x) = -x + \operatorname{artanh}(x)$.

Donc, les solutions de l'équation (E) sur J sont les applications définies par :

$$\forall x \in J, \quad y(x) = \frac{k + \operatorname{artanh}(x) - x}{x^3} \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

Partie III

8. On cherche une application f vérifiant : $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = k$.

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = k$ et f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en zéro.

Donc f est solution du problème posé ssi $k = \frac{2k}{1+k^2} \Leftrightarrow k^3 - k = 0 \Leftrightarrow k = 0$ ou $k = -1$ ou $k = 1$.
 Donc les fonctions constantes solutions du problème posé sont les fonctions égales à -1 , 0 ou 1 .

9. Si f est solution du problème posé, en remplaçant x par zéro dans la relation (e) : $f(2x) = \frac{2f(x)}{1+(f(x))^2}$, on

obtient : $f(0) = \frac{2f(0)}{1+(f(0))^2} \Leftrightarrow f(0) \in \{-1, 0, 1\}$.

10. Si f est solution du problème posé, on a : $\forall x \in \mathbb{I}, f(x) = \frac{2f\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}$ (e').

$$(e') \Rightarrow f(x) - 1 = \frac{2f\left(\frac{x}{2}\right) - 1 - \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{1 + \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} = - \frac{\left(f\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right)^2}{1 + \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} \leq 0$$

$$\text{et } (e') \Rightarrow f(x) + 1 = \frac{2f\left(\frac{x}{2}\right) + 1 + \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{1 + \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} = \frac{\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right)^2}{1 + \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} \geq 0.$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{I}, -1 \leq f(x) \leq 1$.

11. Si f est solution du problème posé, $-f$ est encore définie sur $\mathbb{I}$, à valeurs réelles et dérivable en zéro.

$$\text{De plus : } \forall x \in \mathbb{I}, (e) \Rightarrow -f(2x) = \frac{-2f(x)}{1+(f(x))^2} = \frac{2 \times (-f(x))}{1+(-f(x))^2}.$$

Donc, si f est solution du problème posé, $-f$ l'est aussi.

12. $\tanh$ est une fonction définie sur $\mathbb{I}$, à valeurs réelles et dérivable en zéro.

$$\text{De plus : } \forall x \in \mathbb{I}, \frac{2 \tanh(x)}{1 + (\tanh(x))^2} = \frac{2 \times \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2} = \frac{2 \times (e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} = \tanh(2x).$$

Donc la fonction $\tanh$ est solution du problème posé.

13. $\lim_n \frac{x_0}{2^n} = 0$ donc, comme f est dérivable en zéro, elle est continue en zéro, donc $\lim_n f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = f(0) = 1$.
 Donc, la suite (u_n) est convergente de limite 1.

$$14. \text{ On a : } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)}{1 + \left(f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right)\right)^2} = \frac{2f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right)}{1 + \left(f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right)\right)^2} \Rightarrow u_n = \frac{2u_{n+1}}{1 + (u_{n+1})^2}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} a le signe de u_n puisque $1 + (u_{n+1})^2 > 0$. Par une récurrence évidente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n a le signe de u_0 . Donc, la suite (u_n) garde un signe constant.

$$\text{De plus, on a : } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = u_{n+1} - \frac{2u_{n+1}}{1 + (u_{n+1})^2} = \frac{u_{n+1} \times (u_{n+1}^2 - 1)}{1 + (u_{n+1})^2}.$$

Si $u_0 < 0$, la suite (u_n) est négative. Or, comme $\text{Im } f \subset [-1; 1]$ d'après la question 10., $u_n \in [-1; 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc, $u_{n+1}^2 - 1 \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Donc, si $u_0 < 0$, la suite (u_n) est négative et croissante.

De même, si $u_0 \geq 0$, la suite (u_n) est positive et décroissante.

15. Donc, dans le premier cas, (u_n) converge vers une limite négative ou nulle ce qui est impossible puisque sa limite vaut 1.

Dans la second cas, comme (u_n) est positive et décroissante, elle converge vers une limite $L \leq u_0 = f(x_0) < 1$ car $f(x_0) \in [-1; 1]$, $f(0) = 1$ et $f(x_0) \neq f(0)$; on obtient une nouvelle contradiction.

16. Si f est solution du problème posé avec $f(0) = -1$, alors $-f$ est solution du problème posé avec $-f(0) = 1$, et on tombe encore sur une contradiction.

17. Donc, si f est solution du problème posé avec $f(0) = 1$ ou $f(0) = -1$, alors f est constante.

18. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = 1$.

$$\text{Posons : } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right).$$

Comme à la question 13., on montre que la suite (u_n) est convergente de limite $f(0) = 0$.

On a : $u_0 = f(x_0) = 1$; comme $u_n = \frac{2u_{n+1}}{1 + (u_{n+1})^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $u_n = 1$, on obtient $(u_{n+1})^2 + 1 - 2u_{n+1} = 0$ soit $u_{n+1} = 1$; donc, par récurrence, la suite (u_n) est constante égale à 1 donc convergente de limite 1.

On obtient donc une contradiction.

Donc, si f est solution du problème posé avec $f(0) = 0$, $f(x) \neq 1$, pour tout réel x .

En raisonnant sur $-f$, on en déduit que si f est solution du problème posé avec $f(0) = 0$, $f(x) \neq -1$, pour tout réel x . Donc, d'après la question 10., on a finalement : $\forall x \in \mathbb{I}, -1 < f(x) < 1$.

19. Comme $\tanh$ est solution du problème posé, on a :

$$\forall x \in [-1; 1], \tanh(2 \operatorname{artanh}(x)) = \frac{2 \tanh(\operatorname{artanh}(x))}{1 + (\tanh(\operatorname{artanh}(x)))^2} = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{I}, \tanh(g(2x)) = f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2} = \tanh(2 \operatorname{artanh}(f(x))) = \tanh(2g(x)).$$

Comme $\tanh$ est bijective, on en déduit que : $\forall x \in \mathbb{I}, g(2x) = 2g(x)$.

20. f est dérivable en zéro, $f(0) = 0$ et artanh est dérivable en zéro.

Par composition, g est dérivable en zéro.

21. On a : $\lim_n \frac{x}{2^n} = 0$ et g est dérivable en zéro. De plus, $g(0) = 0$.

$$\frac{g\left(\frac{x}{2^n}\right) - g(0)}{\frac{x}{2^n} - 0}$$

Donc $v_n = \frac{x}{2^n} - 0$; on reconnaît un taux d'accroissement.

Donc, (v_n) est convergente de limite $g'(0)$.

$$22. \text{ On a : } \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{g\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{\frac{x}{2^{n+1}}} = 2 \times \frac{g\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{\frac{x}{2^n}} = \frac{g\left(2 \times \frac{x}{2^{n+1}}\right)}{\frac{x}{2^n}} = \frac{g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} = v_n.$$

Donc (v_n) est une suite constante égale à $v_0 = \frac{g(x)}{x}$ qui est, par là même, sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Donc : $\forall x \in \mathbb{I}^*, g(x) = g'(0) \times x = \lambda \times x$ où $\lambda \in \mathbb{I}$.

De plus, comme $g(0) = 0$, on a : $\forall x \in \mathbb{I}, g(x) = \lambda \times x$ où $\lambda \in \mathbb{I}$.

D'où g est linéaire.

23.

D'après l'étude précédente, si f est solution du problème posé, f est, soit constante égale à -1 ou 1 , soit une application de la forme $f(x) = \tanh(\lambda x)$ où $\lambda \in \mathbb{I}$.

Réciproquement, si f est définie par : $\forall x \in \mathbb{I}, f(x) = \tanh(\lambda x)$ où λ parcourt $\mathbb{I}$, alors f est définie sur $\mathbb{I}$, à valeurs réelles et dérivable en zéro.

De plus, comme $\tanh$ est solution du problème posé (cf 12.), on a :

$$\forall x \in \mathbb{I}, \tanh(2x) = \frac{2 \tanh(x)}{1 + (\tanh(x))^2} \Rightarrow \forall x, \lambda \in \mathbb{I}, \tanh(\lambda \times 2x) = \frac{2 \tanh(\lambda x)}{1 + (\tanh(\lambda x))^2}.$$

Donc, f est bien solution du problème posé.

Les fonctions solutions du problème posé sont donc les fonctions constantes égales à -1 ou 1 et les fonctions définies par : $\forall x \in \mathbb{I}, f(x) = \tanh(\lambda x)$ où λ parcourt $\mathbb{I}$.