

BÀI 1. CHUYÊN VĨNH PHÚC

Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Gọi K, M lần lượt là trung điểm của BD, AC. Đường thẳng qua K và vuông góc với AD cắt đường thẳng qua M và vuông góc với BC tại Q. Chứng minh:

- a) $KM \parallel AB$.
- b) $QD = QC$.

BÀI 2. CHUYÊN THÁI BÌNH

Cho hình vuông ABCD tâm O, cạnh a. M là điểm di động trên đoạn OB (M không trùng với O; B). Vẽ đường tròn tâm I đi qua M và tiếp xúc với BC tại B, vẽ đường tròn tâm J đi qua M và tiếp xúc với CD tại D. Đường tròn (I) và đường tròn (J) cắt nhau tại điểm thứ hai là N.

- a) Chứng minh rằng 5 điểm A, N, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Từ đó suy ra 3 điểm C, M, N thẳng hàng.
- b) Tính OM theo a để tích $NA \cdot NB \cdot NC \cdot ND$ lớn nhất.

BÀI 3. CHUYÊN HẢI PHÒNG

Cho tam giác ABC với $BC = a$; $CA = b$; $AB = c$ ($c < a$; $c < b$). Gọi M; N lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn tâm (O) nội tiếp tam giác ABC với các cạnh AC và BC. Đường thẳng MN cắt các tia AO : BO lần lượt tại P và Q. Gọi E; F lần lượt là trung điểm của AB ; AC

- 1) Chứng minh tứ giác AOQM ; BOPN ; AQPB nội tiếp
- 2) Chứng minh Q; E; F thẳng hàng

3) Chứng minh
$$\frac{MP + NQ + PQ}{a + b + c} = \frac{OM}{OC}$$

BÀI 4. CHUYÊN HÀ NAM

Cho ΔABC nhọn có $\angle C < \angle A$. Đường tròn tâm I nội tiếp ΔABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại các điểm M, N, E; gọi K là giao điểm của BI và NE.

1) Chứng minh:
$$\angle AIB = 90^\circ + \frac{\angle C}{2}$$

- 2) Chứng minh 5 điểm A, M, I, K, E cùng nằm trên một đường tròn.
- 3) Gọi T là giao điểm của BI với AC, chứng minh: $KT \cdot BN = KB \cdot ET$.
- 4) Gọi Bt là tia của đường thẳng BC và chứa điểm C. Khi 2 điểm A, B và tia Bt cố định; điểm C chuyển động trên tia Bt và thoả mãn giả thiết, chứng minh rằng các đường thẳng NE tương ứng luôn đi qua một điểm cố định.

BÀI 5. CHUYÊN HƯNG YÊN

Cho đường tròn tâm O và dây AB không đi qua O. Gọi M là điểm chính giữa của cung AB nhỏ. D là một điểm thay đổi trên cung AB lớn (D khác A và B). DM cắt AB tại C. Chứng minh rằng:

- a) $MB \cdot BD = MD \cdot BC$
- b) MB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.
- c) Tổng bán kính các đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và ACD không đổi.

BÀI 6. CHUYÊN HẢI DƯƠNG

Cho tam giác MNP có ba góc nhọn và các điểm A, B, C lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N, P trên NP, MP, MN. Trên các đoạn thẳng AC, AB lần lượt lấy D, E sao cho DE song song với NP. Trên tia AB lấy điểm K sao cho $\widehat{DMK} = \widehat{NMP}$. Chứng minh rằng:

- 1) $MD = ME$
- 2) Tứ giác MDEK nội tiếp. Từ đó suy ra điểm M là tâm của đường tròn bàng tiếp góc DAK của tam giác DAK.

BÀI 7. CHUYÊN CHUNG HÀ NAM

Cho ΔABC vuông đỉnh A, đường cao AH, I là trung điểm của AH, K là trung điểm của HC. Đường tròn đường kính AH ký hiệu (AH) cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại điểm M và N.

- 1) Chứng minh ΔACB và ΔAMN đồng dạng
- 2) Chứng minh KN là tiếp tuyến với đường tròn (AH)
- 3) Tìm trục tâm của ΔABK

BÀI 8. CHUYÊN NINH BÌNH

Cho đường tròn (O; R) và đường thẳng (d) không đi qua tâm O cắt đường tròn (O; R) tại hai điểm phân biệt A, B. Điểm M chuyển động trên (d) và nằm ngoài đường tròn (O; R), qua M kẻ hai tiếp tuyến MN và MP tới đường tròn (O; R) (N, P là hai tiếp điểm).

- a) Chứng minh rằng tứ giác MNOP nội tiếp được trong một đường tròn, xác định tâm đường tròn đó.
- b) Chứng minh $MA \cdot MB = MN^2$.
- c) Xác định vị trí điểm M sao cho tam giác MNP đều.
- d) Xác định quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP.

BÀI 9. CHUYÊN THANH HÓA

1) Cho hình vuông ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại E. Một đường thẳng đi qua A, cắt cạnh BC tại M và cắt đường thẳng CD tại N. Gọi K là giao điểm của các đường thẳng EM và BN. Chứng minh rằng: $CK \perp BN$.

2) Cho đường tròn (O) bán kính $R = 1$ và một điểm A sao cho $OA = \sqrt{2}$. Vẽ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Một góc xOy có số đo bằng 45° có cạnh Ox cắt đoạn thẳng AB tại D và cạnh Oy cắt đoạn thẳng AC tại E. Chứng minh rằng $2\sqrt{2} - 2 \leq DE < 1$.

BÀI 10. CHUYÊN NGHỆ AN

1) Cho tam giác ABC vuông tại A có đường phân giác trong BE (E thuộc AC). Đường tròn đường kính AB cắt BE, BC lần lượt tại M, N (khác B). Đường thẳng AM cắt BC tại K. Chứng minh: $AE \cdot AN = AM \cdot AK$.

2) Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn, trung tuyến AO có độ dài bằng độ dài cạnh BC. Đường tròn đường kính BC cắt các cạnh AB, AC thứ tự tại M, N (M khác B, N khác C). Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường thẳng AO lần lượt tại I và K. Chứng minh tứ giác BOIM nội tiếp được một đường tròn và tứ giác BICK là hình bình hành.

BÀI 11. CHUYÊN BÌNH ĐỊNH

Cho tam giác ABC nội tiếp tròn tâm O có độ dài các cạnh $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. E là điểm nằm trên cung BC không chứa điểm A sao cho cung EB bằng cung EC. AE cắt cạnh BC tại D.

a) Chứng minh: $AD^2 = AB \cdot AC - DB \cdot DC$

b) Tính độ dài AD theo a, b, c

BÀI 12. CHUYÊN PHÚ YÊN

Cho hình vuông ABCD và tứ giác MNPQ có bốn đỉnh thuộc bốn cạnh AB, BC, CD, DA của hình vuông.

a) Chứng minh rằng $S_{ABCD} \leq \frac{AC}{4} (MN + NP + PQ + QM)$.

b) Xác định vị trí của M, N, P, Q để chu vi tứ giác MNPQ nhỏ nhất.

BÀI 13. CHUYÊN KIÊN GIANG

Cho hai nĩđông trẽn (O ; R) vaø (O' ; R') caét nhau tại A vaø B ($R > R'$). Tieáp tuyeán tại B của (O' ; R') caét (O ; R) tại C vaø tieáp tuyeán tại B của (O ; R) caét (O' ; R') tại D.

a/ Chõùng minh raẽng: $AB^2 = AC \cdot AD$ vaø $\left(\frac{BC}{BD}\right)^2 = \frac{AC}{AD}$

b/ Laáy nĩẽm E nĩái xõùng của B qua A. Chõùng minh boán nĩẽm B, C, E, D thuoác moät nĩđông trẽn coù taâm laø K. Xaùc ñònh taâm K của nĩđông trẽn.

BÀI 14. CHUYÊN BÌNH DƯƠNG

Cho tam gi,c ABC cũ 3 gũc nhũn . BE vµ CF lµ hai ®êng cao. Trũc t©m H. Trũn HB vµ HC lũn lĩt lĩy ®ĩóm M , N sao cho $\angle MCN = \angle MNB = 90^\circ$. Chũng minh : $AM = AN$.

BÀI 15. QUỐC GIA TP HCM

Bài 4. (1.5 điểm)

Cho tam giác ABC , có $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $\widehat{ACB} = 45^\circ$. Dựng $AH \perp BC$ ($H \in BC$), và dựng $HK \perp AB$ ($K \in AB$). Gọi M là trung điểm của AC . Biết $AH = \sqrt{3}$, tính BC . Chứng minh $BKMC$ là tứ giác nội tiếp.

Bài 5. (1 điểm)

Trong kỳ kiểm tra môn Toán một lớp gồm 3 tổ A, B, C, điểm trung bình của học sinh ở các tổ được thống kê ở bảng sau:

Tổ	A	B	C	A và B	B và C
Điểm trung bình	9.0	8.8	7.8	8.9	8.2

Biết tổ A gồm 10 học sinh, hãy xác định số học sinh và điểm trung bình của toàn lớp.

Bài 6. (1 điểm)

Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) , có đỉnh A cố định và các đỉnh B, C, D di chuyển trên (O) sao cho $\widehat{BAD} > 90^\circ$. Kẻ tia Ax vuông góc với AD cắt BC tại E , kẻ tia Ay vuông góc với AB cắt CD tại F . Gọi K là điểm đối xứng của A qua EF . Chứng minh tứ giác $EFCK$ nội tiếp được và đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

BÀI 16 PTNK HCM**Câu 4.**

Cho đường tròn (O) tâm O , đường kính $AB = 2R$. C là một điểm thay đổi trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC không cân tại C . Gọi H là chân đường cao của tam giác ABC hạ từ C . Hạ HE, HF vuông góc với AC, BC tương ứng. Các đường thẳng EF và AB cắt nhau tại K .

a) Tính theo R diện tích tam giác CEF và độ dài các đoạn KA, KB trong trường hợp $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

b) Hạ EP, FQ vuông góc với AB . Chứng minh rằng đường tròn đường kính PQ tiếp xúc với đường thẳng EF .

c) Gọi D là giao điểm của (O) và đường tròn đường kính $CH, D \neq C$. Chứng minh rằng $KA.KB = KH^2$ và giao điểm M của các đường thẳng CD và EF luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Câu 5.

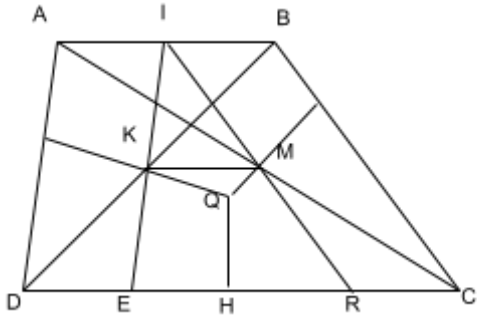
Trên một đường tròn, người ta xếp các số $1, 2, 3, \dots, 10$ (mỗi số xuất hiện đúng một lần).

a) Chứng minh không tồn tại một cách xếp mà tổng hai số kề nhau đều lớn hơn 10.

b) Tồn tại hay không một cách xếp mà tổng hai số kề nhau đều lớn hơn hoặc bằng 10?

-----Hết-----

ĐÁP ÁN BÀI 1

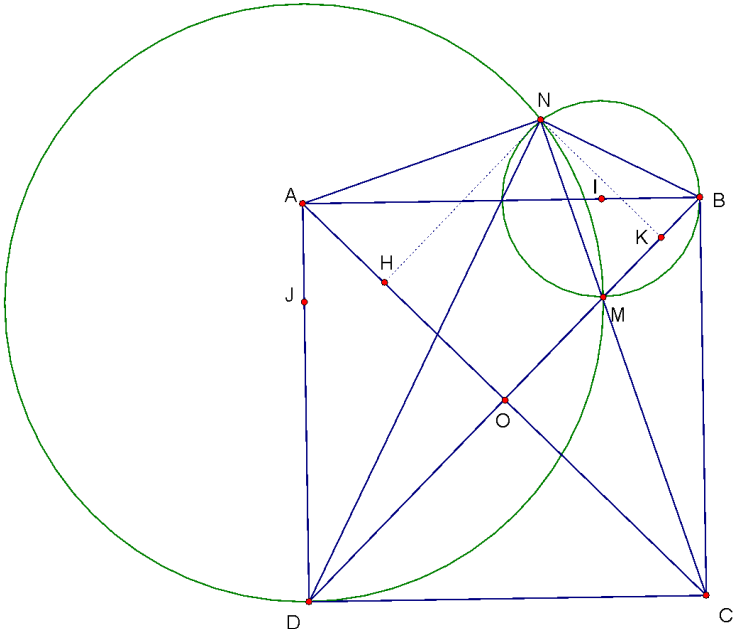
Nội dung trình bày		Điểm
	Gọi I là trung điểm AB, $E = IK \cap CD, R = IM \cap CD$. Xét hai tam giác KIB và KED có: $\angle ABD = \angle BDC$	0,25
	$KB = KD$ (K là trung điểm BD)	0,25
	$\angle KIB = \angle KED$	0,25
	Suy ra $\triangle KIB = \triangle KED \Rightarrow IK = KE$.	0,25
	Chứng minh tương tự có: $\triangle MIA = \triangle MRC$	0,25
	Suy ra: $MI = MR$	0,25
	Trong tam giác IER có $IK = KE$ và $MI = MR$ nên KM là đường trung bình $\Rightarrow KM \parallel CD$	0,25
	Do $CD \parallel AB$ (gt) do đó $KM \parallel AB$ (đpcm)	0,25

b) 1,0 điểm:

Nội dung trình bày	Điểm
--------------------	------

Ta có: $IA=IB, KB=KD$ (gt) $\Rightarrow IK$ là đường trung bình của $\triangle ABD \Rightarrow IK//AD$ hay $IE//AD$ chứng minh tương tự trong $\triangle ABC$ có $IM//BC$ hay $IR//BC$	0,25
Có: $QK \perp AD$ (gt), $IE//AD$ (CM trên) $\Rightarrow QK \perp IE$. Tương tự có $QM \perp IR$	0,25
Từ trên có: $IK=KE, QK \perp IE \Rightarrow QK$ là trung trực ứng với cạnh IE của $\triangle IER$. Tương tự QM là trung trực thứ hai của $\triangle IER$	0,25
Hạ $QH \perp CD$ suy ra QH là trung trực thứ ba của $\triangle IER$ hay Q nằm trên trung trực của đoạn $CD \Rightarrow Q$ cách đều C và D hay $QD=QC$ (đpcm).	0,25

ĐÁP ÁN BÀI 2

Bài 4. (3 điểm)	Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, cạnh a. M là điểm di động trên đoạn OB (M không trùng với O; B). Vẽ đường tròn tâm I đi qua M và tiếp xúc với BC tại B, vẽ đường tròn tâm J đi qua M và tiếp xúc với CD tại D. Đường tròn (I) và đường tròn (J) cắt nhau tại điểm thứ hai là N. a. Chứng minh rằng 5 điểm A, N, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Từ đó suy ra 3 điểm C, M, N thẳng hàng. b. Tính OM theo a để tích $NA.NB.NC.ND$ lớn nhất. 
---------------------------	---

	a. 2.0đ	$\angle MNB = \angle MBC$ (Cùng chắn cung BM) $\angle MND = \angle MDC$ (Cùng chắn cung DM) $\angle BND = \angle MNB + \angle MND = \angle MBC + \angle MDC = 90^\circ$ Do đó 5 điểm A, B, C, D, M cùng thuộc một đường tròn	1.5
		Suy ra NC là phân giác của góc BND (do cung BC = cung BD) Mặt khác, theo CM trên ta có NM là phân giác của góc BND Nên M, N, C thẳng hàng.	0.5
	b. 1.0đ	Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của N trên AC và BD $\Rightarrow$ NHOK là hình chữ nhật Ta có : $NA.NC = NH.AC = NH.a\sqrt{2}$ $NB.ND = NK.BD = NK.a\sqrt{2}$ Suy ra $NA.NB.NC.ND = 2a^2.NH.NK \leq 2a^2 \cdot \frac{NH^2 + NK^2}{2} = a^2.NO^2 = \frac{a^4}{2}$	0.5
		Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $NH = NK = \frac{a}{2} \Leftrightarrow OM = \frac{(2-\sqrt{2})a}{2}$	0.5

ĐÁP ÁN bài 3

$$\widehat{BOP} = \widehat{AO} + \widehat{BO} = \frac{1}{2}(\widehat{A} + \widehat{B})$$

$$\widehat{PNC} = \frac{180^\circ - \widehat{C}}{2} = \frac{1}{2}(\widehat{A} + \widehat{B})$$

Bài 4 : a) ta có $\Rightarrow \widehat{BOP} = \widehat{PNC}$

$\Rightarrow$ tứ giác BOPN nội tiếp

+) tương tự tứ giác AOQM nội tiếp

+) do tứ giác AOQM nội tiếp $\Rightarrow \widehat{QAO} = \widehat{QMO} = 90^\circ$

tứ giác BOPN nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BPO} = \widehat{BNO} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{QOB} = \widehat{QPB} = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác AQPB nội tiếp

b) tam giác AQB vuông tại Q có QE là trung tuyến nên QE = EB = EA

$$\Rightarrow \widehat{EQB} = \widehat{EBQ} = \frac{1}{2}\widehat{B} = \widehat{QBC} \Rightarrow QE \parallel BC$$

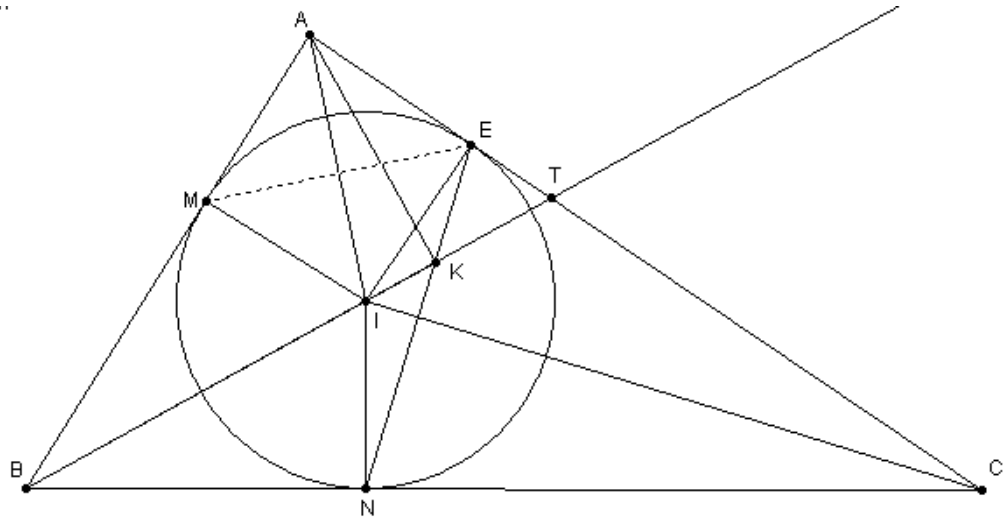
Mà E F là đường trung bình của tam giác ABC nên EF $\parallel$ BC

$\Rightarrow$ Q; E; F thẳng hàng

c)

$$\begin{aligned}\Delta MOP &\sim \Delta COB(g-g) \Rightarrow \frac{MP}{a} = \frac{OM}{OC} = \frac{OP}{OB} \\ \Delta NOQ &\sim \Delta COA(g-g) \Rightarrow \frac{NQ}{b} = \frac{ON}{OC} = \frac{OM}{OC} \\ \Delta POQ &\sim \Delta BOA(g-g) \Rightarrow \frac{PQ}{c} = \frac{OP}{OB} = \frac{OM}{OC} \\ \Rightarrow \frac{OM}{OC} &= \frac{MP}{a} = \frac{NQ}{b} = \frac{PQ}{c} = \frac{MP+NQ+PQ}{A+B+C}\end{aligned}$$

ĐÁP ÁN BÀI 4''



* ý c : Chứng minh $KT.BN = KB.ET$

Cách 1: C/m $\Delta AKT \sim \Delta IET \Rightarrow \frac{KT}{ET} = \frac{AK}{IE}$

C/m $\Delta AKB \sim \Delta INB \Rightarrow \frac{KB}{BN} = \frac{AK}{IN}$

Do $IE = IN$ từ đó ta suy ra điều phải chứng minh

Cách 2:

C/m $\Delta TKE \sim \Delta TAI \Rightarrow \frac{KT}{ET} = \frac{TA}{TI}$

C/m $\Delta BIM \sim \Delta BAK \Rightarrow \frac{KB}{BM} = \frac{AB}{BI}$

Theo tính chất tia phân giác của ΔABT ta có $\frac{TA}{TI} = \frac{AB}{BI}$

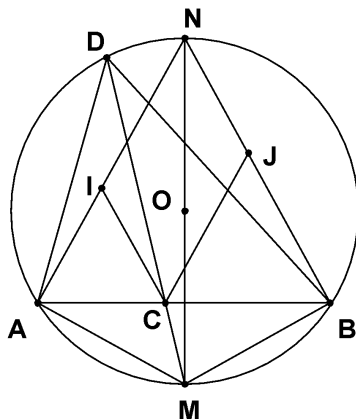
Và do $BM = BN$ từ đó suy ra điều phải c/m

*ý d: Chứng minh NE đi qua một điểm cố định: Do A, B và tia Bt cố định nên ta có tia Bx cố định và $\angle ABI = \alpha$ không đổi (tia Bx là tia phân giác của $\angle ABt$)

Xét $\triangle ABK$ vuông tại K ta có $KB = AB \cdot \cos \angle ABI = AB \cdot \cos \alpha$ không đổi

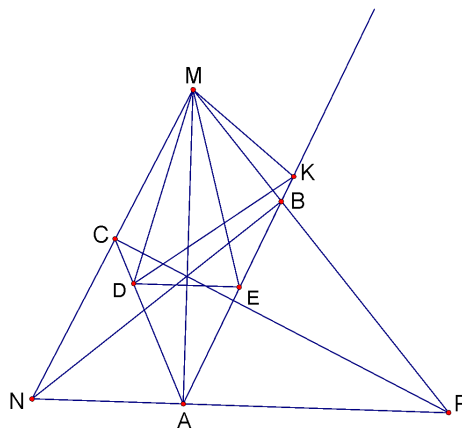
Như vậy điểm K thuộc tia Bx cố định và cách gốc B một khoảng không đổi do đó K cố định $\Rightarrow$ đpcm.

ĐÁP ÁN HƯNG YÊN



a) Xét $\triangle MBC$ và $\triangle MDB$ có: $\angle BMC = \angle MBD$ (hai góc nối tiếp chung đỉnh M) $\angle MCB = \angle MDB$	0,5 đ
Do vậy $\triangle MBC$ và $\triangle MDB$ đồng dạng Suy ra $\frac{MB}{BC} = \frac{MD}{BD} \Rightarrow MB \cdot BD = MD \cdot BC$	0,5 đ
b) Gọi (J) là đường tròn ngoại tiếp $\triangle BDC \Rightarrow \angle BJC = 2\angle BDC = 2\angle MBC$ $\Rightarrow \angle MBC = \frac{\angle BJC}{2}$ hay $\triangle BCJ$ nội tiếp $\Rightarrow \angle CBJ = \frac{180^\circ - \angle BJC}{2}$	0,5 đ
Suy ra $\angle MBC + \angle CBJ = \frac{\angle BJC}{2} + \frac{180^\circ - \angle BJC}{2} = 90^\circ \Rightarrow MB \perp BJ$ Suy ra MB là tiếp tuyến của đường tròn (J), suy ra J thuộc NB	0,5 đ
c) Kẻ đường kính MN của (O) $\Rightarrow NB \perp MB$ Mà MB là tiếp tuyến của đường tròn (J), suy ra J thuộc NB Gọi (I) là đường tròn ngoại tiếp $\triangle ADC$	0,5 đ

Chứng minh tương tự I thuộc AN			
Ta có $\widehat{ANB} = \widehat{ADB} = 2\widehat{BDM} = \widehat{BJC} \Rightarrow CJ \parallel IN$			
Chứng minh tương tự: CI // JN			
Do đó tứ giác CINJ là hình bình hành $\Rightarrow CI = NJ$			
Suy ra tổng bán kính của hai đường tròn (I) và (J) là: IC + JB = BN (không đổi)			0,5 đ
ĐÁP ÁN HẢI DƯƠNG c©uIV 2 @iÓm	1)		0.25
	0,75@iÓm		
		Ta dõ dụng chứng minh tở gi,c MBAN néi tiÕp $\Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{MNB}$, MCAP néi tiÕp $\Rightarrow \widehat{CAM} = \widehat{CPM}$	0.25
		L'i cũ $\widehat{BNM} = \widehat{CPM}$ (cũng phõ gấc NMP) $\Rightarrow \widehat{CAM} = \widehat{BAM} \quad (1)$	0.25
		Do DE // NP mEt kh,c $MA \perp NP \Rightarrow MA \perp DE \quad (2)$ Tõ (1), (2) $\Rightarrow \triangle ADE$ c©n t'i A $\Rightarrow MA$ lụ trung trùc cũa DE $\Rightarrow MD = ME$	0.25
	2)		0.25
	1,25@iÓm		



Do $DE \parallel NP$ nên $\angle DEK = \angle NAB$, mà $\angle K$ chung, c $\Delta MNAB$ nên $\angle MNB = \angle MPA$:

$$\angle MNB + \angle NAB = 180^\circ \Rightarrow \angle MNB + \angle DEK = 180^\circ$$

Theo $\angle$ thì $\angle DMK = \angle MPA \Rightarrow \angle DMK + \angle DEK = 180^\circ$

$\Rightarrow$ T Δ $MDEK$ nên $\angle MDE = \angle MKE$

Do MA là trung trực của $DE \Rightarrow \Delta MEA = \Delta MDA$

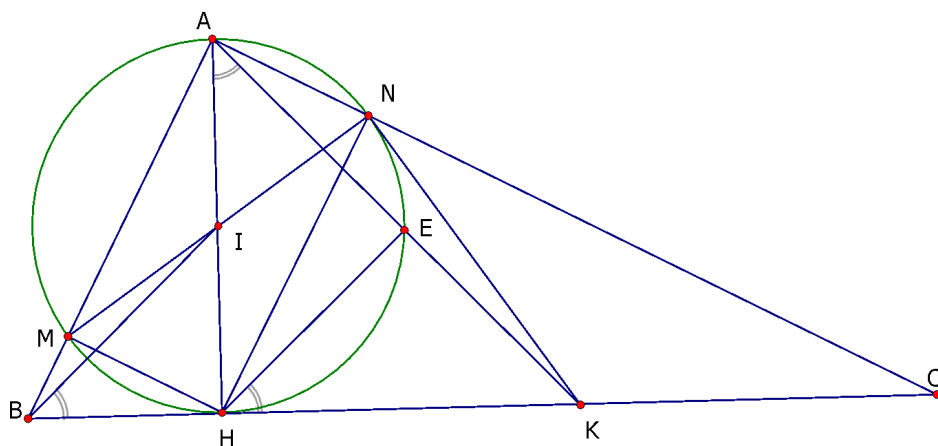
$$\Rightarrow \angle MEA = \angle MDA \Rightarrow \angle MEK = \angle MDC$$

$\forall x \angle MEK = \angle MDK \Rightarrow \angle MDK = \angle MDC \Rightarrow DM$ là phân giác của $\angle CDK$, kết hợp với AM là phân giác của $\angle DAB \Rightarrow M$ là tâm của $\odot$ ngoại tiếp ΔDAK .

ĐÁP ÁN CHUYÊN CHUNG HÀ NAM

Bài 4(3,5 điểm)

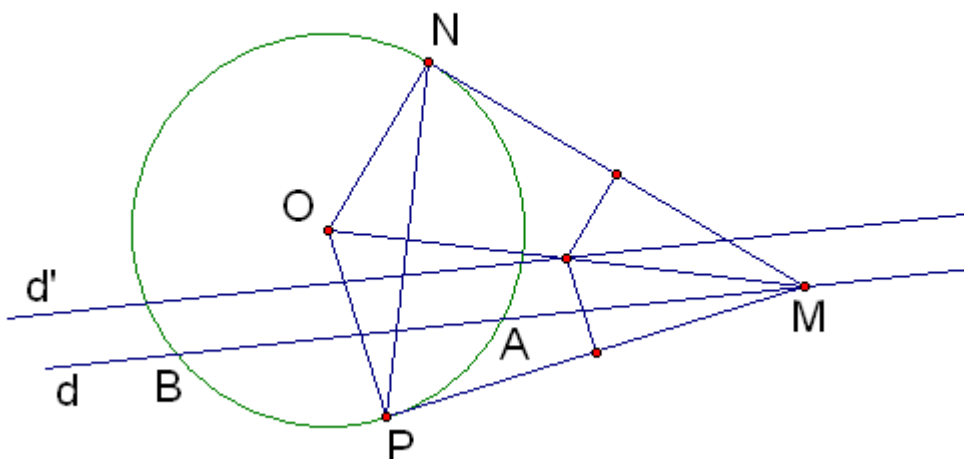
a) (1,5 điểm)



0,25

ΔAMN và ΔACB vuông ở đỉnh A	0,25
Cả $\angle AMN = \angle HNC$ (cùng chắn cùng AN) $\angle HNC = \angle ACH$ (cùng phụ với $\angle HAN$) (AH là đường kính) $\Rightarrow \angle AMN = \angle ACH$	0,75
$\Rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ACB$	0,25
b) (1 điểm) ΔHNC vuông ở đỉnh N và $\angle ANH = 90^\circ$ cả $KH = KC \Rightarrow NK = HK$ Lại cả $IH = IN$ (bên kính đường tròn (AH)) và IK chung nên $\Delta KNI = \Delta KHI$ (c.c.c) $\Rightarrow \angle KNI = \angle KHI = 90^\circ \Rightarrow \angle KNI = 90^\circ$	0,75
Cả $KN \perp IN$, IN là b, kính của (AH) $\Rightarrow KN$ là tiếp tuyến với đường tròn (AH)	0,25
c) (1 điểm) + Gọi E là giao điểm của AK với đường tròn (AH), chứng minh góc HAK = góc HBI Ta có $AH^2 = HB \cdot HC \Rightarrow AH \cdot 2IH = HB \cdot 2HK \Rightarrow \frac{HA}{HB} = \frac{HK}{HI}$ $\Rightarrow \Delta HAK \sim \Delta HBI \Rightarrow \angle HAK = \angle HBI$	0,5
+ Cả $\angle HAK = \angle HKI$ (ch chắn cùng HE) $\Rightarrow \angle HBI = \angle HKI \Rightarrow BI \parallel HE$ Cả $\angle EKH = 90^\circ$ (AH là đường kính) $\Rightarrow BI \perp AK$	0,25
ΔABK cân $\Rightarrow BI \perp AK$ và $\Rightarrow BK \perp AI \Rightarrow I$ là trọng tâm ΔABK	0,25

ĐÁP ÁN NHÌN BÌNH



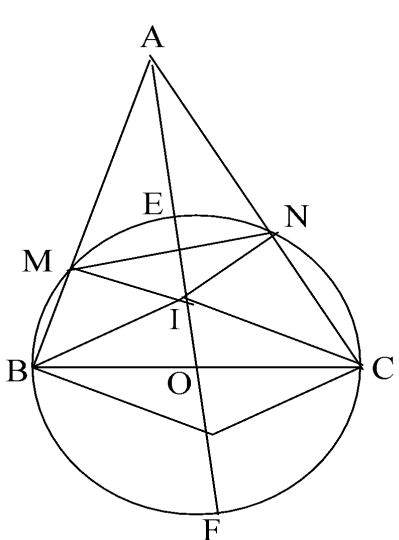
a, b).

c) Tam giác MNP đều khi $OM = 2R$

d) Quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP là đường thẳng d' song song với đường thẳng d (trừ các điểm ở bên trong đường tròn).

ĐÁP ÁN NGHỆ AN

Bµi 3:		2,0 ®
	V× BE lµ ph©n gi,c gãc $\angle ABC$ nªn $\angle ABM = \angle ABC \Rightarrow \angle AM = \angle MN$	0,25®
	$\Rightarrow \angle MAE = \angle MAN$ (1)	
		0,50®
	V× M, N thuéc ®êng trßn ®êng kÝnh AB nªn $\angle AMB = \angle ANB = 90^0$	0,25®
	$\Rightarrow \angle ANK = \angle ME = 90^0$, kÕt hîp víi (1) ta cã tam gi,c AME ®ång d¹ng víi tam gi,c ANK	0,50®

	$\Rightarrow \frac{AN}{AM} = \frac{AK}{AE}$	0,25®
	$\Rightarrow AN.AE = AM.AK \text{ (®pcm)}$	0,25®
Bµi 4:		1,5 ®
	V× tợ gi,c AMIN nẻi tiŔp n²n $\angle ANM = \angle AIM$ V× tợ gi,c BMNC nẻi tiŔp n²n $\angle ANM = \angle ABC$ $\Rightarrow \angle AIM = \angle ABC$.Suy ra tợ gi,c BOIM nẻi tiŔp	0,25®
	Tổ chøng minh tr²n suy ra tam gi,c AMI ®ång d²ng vớ tam gi,c AOB $\Rightarrow \frac{AM}{AO} = \frac{AI}{AB} \Rightarrow AI.AO = AM.AB \quad (1)$	0,25®
	Gãi E, F lụ giao ®iŔm c²n² ®êng th²ng AO vớ (O) (E n²m gi÷a A, O). Chøng minh t²ng từ (1) ta ®íc: AM.AB = AE.AF $= (AO - R)(AO + R) \text{ (vớ } BC = 2R)$ $= AO^2 - R^2 = 3R^2$	0,25®
	$\Rightarrow AI.AO = 3R^2 \Rightarrow AI = \frac{3R^2}{AO} = \frac{3R^2}{2R} = \frac{3R}{2} \Rightarrow OI = \frac{R}{2} \quad (2)$	0,25®
	Tam gi,c AOB vµ tam gi,c COK ®ång d²ng n²n $OA.OK = OB.OC = R^2$ $\Rightarrow OK = \frac{R^2}{OA} = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2} \quad (3)$	0,25®
	Tổ (2), (3) suy ra $OI = OK$ Suy ra O lụ trung ®iŔm IK, mụ O lụ trung ®iŔm c²n² BC	0,25®

ĐÁP ÁN BÌNH ĐỊNH

Bài 3:

Ta có $\angle BAD = \angle CAE$ (Do cung $EB =$ cung EC)

Và $\angle AEC = \angle DBA$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC) nên $\triangle BAD \sim \triangle EAC$

$$\Rightarrow \frac{BA}{AD} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow AB.AC = AE.AD \quad (1)$$

Ta có $\angle ADC = \angle BDC$ (§ 81) và $\angle CAD = \angle DBE$

(2 góc nội tiếp cùng chắn cung CE) nên $\triangle ACD \sim \triangle BDE$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{DB}{DE} \Rightarrow AD.DE = DB.DC$$

$$AD(AE - AD) = DB.DC$$

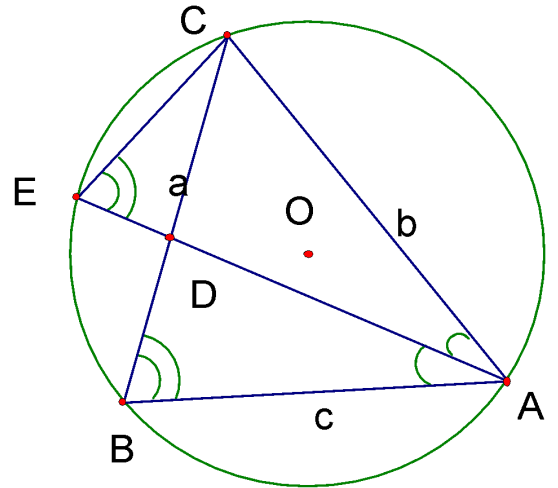
$$\text{Hay } AD^2 = AD.AE - DB.DC = AB.AC - DB.DC \quad (\text{do } (1))$$

$$4b) \text{ Theo tính chất đường phân giác ta có } \frac{DC}{AC} = \frac{DB}{AB} \text{ hay } \frac{DC}{b} = \frac{DB}{c} = \frac{DC + DB}{b + c} = \frac{a}{b + c}$$

$$\text{vậy } \frac{DC}{b} \cdot \frac{DB}{c} = \frac{a}{b + c} \cdot \frac{a}{b + c} \Rightarrow DB.DC = \frac{a^2 bc}{(b + c)^2}$$

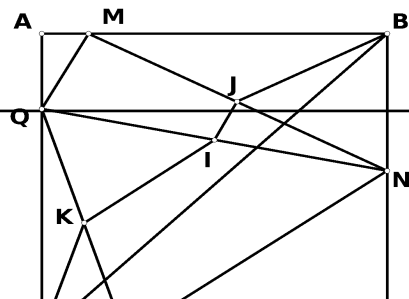
$$\text{theo câu a ta có } AD^2 = AB.AC - DB.DC = bc - \frac{a^2 bc}{(b + c)^2} = bc \left(1 - \frac{a^2}{(b + c)^2} \right)$$

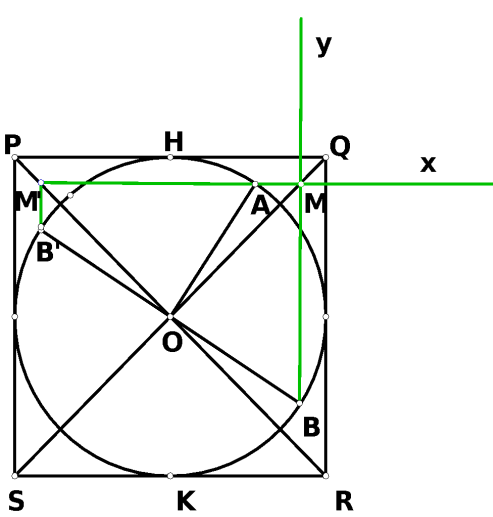
$$\Rightarrow AD = \sqrt{bc \left(1 - \frac{a^2}{(b + c)^2} \right)}$$



ĐÁP ÁN PHÚ YÊN

Câu 5a.	Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của QN, MN, PQ. Khi đó :	
----------------	---	--



(2,0)	$\frac{MN}{2}$ $BJ = \frac{MN}{2}$ (trung tuyến Δ vuông MBN) $\frac{PQ}{2}$ Tương tự $DK = \frac{PQ}{2}$. $\frac{QM}{2}$ $IJ = \frac{QM}{2}$ (IJ là đtb Δ MNQ). $\frac{PN}{2}$ Tương tự $IK = \frac{PN}{2}$. Vì $BD \leq BJ + JI + IK + KD$. Do đó: $S_{ABCD} = \frac{AC}{2} \cdot BD \leq \frac{AC}{2} (BJ + JI + IK + KD) = \frac{AC}{4} (MN + NP + PQ + QM)$ - đpcm.	0,50 0,50 0,50 0,50
Câu 5b • (1,0)	Chu vi tứ giác MNPQ là : $MN + NP + PQ + QM = 2BJ + 2IK + 2DK + 2IJ$ $= 2(BJ + JI + IK + KD) \geq 2BD \text{ (cmt)}$ Dấu bằng xảy ra khi đường gấp khúc trùng với BD, tức là $MQ \parallel NP$, $MN \parallel PQ$, $MN = PQ$ (vì cùng là cạnh huyền 2 tam giác vuông cân bằng nhau), lúc đó MNPQ là hình chữ nhật.	0,50 0,50
Câu 6. (3,0đ)	Kí hiệu như hình vẽ. Phần thuận : $\angle AOB = \angle AMB = 90^\circ$ (giả thiết) $\Rightarrow$ tứ giác AOBM luôn nội tiếp $\Rightarrow \angle MOA = \angle BOA = 45^\circ$ (vì ΔAOB vuông cân tại O) Suy ra M luôn nằm trên đường thẳng đi qua O và tạo với đường PQ một góc 45°. Trường hợp B ở vị trí B' thì M' nằm trên đường thẳng đi qua O 	0,50 0,50

và tạo với PS một góc 45^0. <u>Giới hạn :</u> *) Khi $A \equiv H$ thì $M \equiv Q$, khi $A \equiv K$ thì $M \equiv S$ *) Trường hợp B ở vị trí B': khi $A \equiv H$ thì $M' \equiv P$, khi $A \equiv K$ thì $M' \equiv R$ <u>Phần đảo:</u> Lấy M bất kì trên đường chéo SQ (hoặc M' trên PR), qua M kẻ đường thẳng song song với đường thẳng PQ cắt (O) tại A. Kẻ bán kính $OB \perp OA$. Ta thấy tứ giác AOBM nội tiếp (vì $\angle AMO = \angle ABO = 45^0$) Suy ra : $\angle AMB = \angle AOB = 90^0$. Mà $AM \parallel PQ$, $PQ \perp PS \Rightarrow MB \parallel PS$. <u>Kết luận:</u>Quỹ tích giao điểm M là 2 đường chéo của hình vuông PQRS.	0,50 0,50 0,50 0,50
--	---

ĐÁP ÁN KIÊN GIANG

a/ Xeùt (O) ta coù $\overline{C_1} = \overline{B_2}$ (chaén cung AnB)

Xeùt (O') ta coù $\overline{D_1} = \overline{B_1}$ (chaén cung AmB)

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta ADB$

$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{BD} \quad (1)$

$\Rightarrow AB^2 = AC \cdot AD$

$\left(\frac{BC}{BD}\right)^2 = \left(\frac{AB}{AD}\right)^2 = \frac{AB^2}{AD^2} = \frac{AC \cdot AD}{AD^2} = \frac{AC}{AD}$

b/ Töö (1) thay $AE = AB$ ta coù

$\frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AE} \quad (*)$ maët khaùc:

$\overline{A_1} = \overline{C_1} + \overline{B_1} ; \overline{A_2} = \overline{B_2} + \overline{D_1}$

$\Rightarrow \overline{A_1} = \overline{A_2} \quad (**)$

Töö (*) vaø (**) suy ra:

$$\Delta AEC \sim \Delta ADE \quad (c-g-c)$$

$$\Rightarrow \angle E_2 = \angle D_2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \angle CED + \angle CBD &= \angle E_1 + \angle E_2 + \angle B_1 + \angle B_2 \\ &= \angle E_1 + \angle D_2 + \angle D_1 + \angle B_2 \\ &= 180^\circ \quad (\text{xet } \Delta BDE) \end{aligned}$$

Vaây tồu giaùc BCED noãi tieáp ñồôøng troøn taâm K. Vôùi K laø gaio ñieãm 3 ñồôøng troïc cuûa ΔBCE hoaëc ΔBDE

ĐÁP ÁN BÌNH DƯƠNG

Câu 5:

$$\Delta AEB \sim \Delta AFC \quad (g-g)$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$$

$$\Rightarrow AE \cdot AC = AF \cdot AB \quad (1)$$

$\Delta MAC, ME$: ®êng .cao

$$MA^2 = AE \cdot AC \quad (2)$$

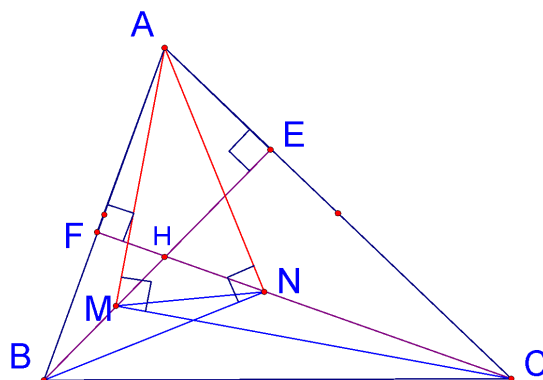
$\Delta NAB, NF$: ®êng .cao

$$NA^2 = AF \cdot AB \quad (3)$$

Tõ (1),(2),(3)

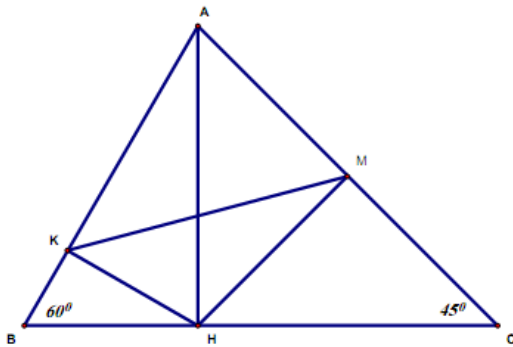
$$\Rightarrow MA^2 = NA^2$$

$$\Rightarrow MA = NA$$



ĐÁP ÁN ĐHQG HCM

Bài 4.



a) Trong tam giác vuông ABH ta có

$$\tan \widehat{ABH} = \frac{AH}{BH} \Rightarrow BH = \frac{AH}{\tan \widehat{ABH}} = \frac{\sqrt{3}}{\tan 60^\circ} = 1$$

Trong tam giác vuông AHC có

$\widehat{ACH} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{HAC} = 45^\circ$ nên AHC là tam giác vuông cân, suy ra $HC = HA = \sqrt{3}$

Do đó $BC = BH + CH = 1 + \sqrt{3}$ (đvdd)

b) Tam giác AHC vuông cân, có AM là trung tuyến nên cũng là đường cao, suy ra $AM \perp HC$

C1: Tứ giác AKHM có $\widehat{AKH} + \widehat{AMH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp, suy ra

$$\widehat{AKM} = \widehat{AHM} = 90^\circ - \widehat{HAM} = 45^\circ$$

Tứ giác BKMC có $\widehat{AKM} = \widehat{BCM} = 45^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp.

C2: Ta có $AK \cdot AB = AH^2$, $AM \cdot AC = AH^2$, suy ra $AK \cdot AB = AM \cdot AC$

Suy ra tam giác AKM và ABC đồng dạng (c.g.c), suy ra $\widehat{AKM} = \widehat{BCM} = 45^\circ$ nên là tứ BKMC giác nội tiếp.

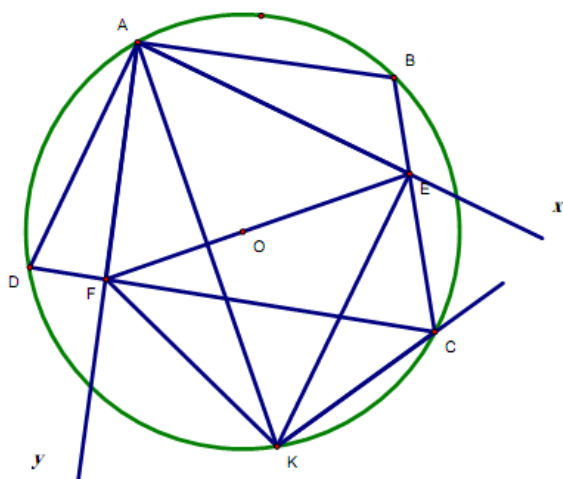
Bài 5. Gọi x, y lần lượt là số học sinh tổ B và C.

Ta có
$$\frac{9 \times 10 + 8,8 \times x}{10 + x} = 8,9 \Rightarrow x = 10$$

Tương tự
$$\frac{8,8 \times x + 7,8 \times y}{x + y} = 8,2, \text{ với } x = 10 \text{ thì } y = 15$$

Vậy điểm trung bình của cả lớp là
$$\frac{9 \times 10 + 8,8 \times 10 + 7,8 \times 15}{10 + x + y} = 8,43$$

Bài 6.



* Tứ giác ABCD nội tiếp nên $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$
 Và

$$\widehat{BAD} + \widehat{EAF} = \widehat{BAE} + \widehat{EAF} + \widehat{FAD} + \widehat{EAF}$$

$$= \widehat{BAF} + \widehat{DAE} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Suy ra $\widehat{BCD} = \widehat{EAF}$ (1)

Mặt khác, do A và K đối xứng nhau qua EF nên
 $\widehat{EKF} = \widehat{EAF}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{EKF} = \widehat{ECF}$, do đó tứ giác EFKC nội tiếp.

* Vì tứ giác EFKC nội tiếp nên ta có $\widehat{FCK} = \widehat{FEK}$
 mà $\widehat{FEK} = \widehat{FEA}$ (do tính chất đối xứng)
 Và $\widehat{FEA} = \widehat{KAD}$ (cùng phụ với $\widehat{KAE}$)

Do đó $\widehat{KAD} = \widehat{FCK}$

Suy ra tứ giác ADKC nội tiếp, suy ra K thuộc (O), suy ra OA = OK, suy ra O thuộc đường trung trực của AK mà EF là đường trung trực của AK nên O thuộc EF. Vậy đường thẳng EF luôn đi qua điểm O cố định.

ĐÁP ÁN PTNK HCM

Câu 4

b) Chứng minh EF tiếp xúc với đường tròn đường kính PQ

Câu b, c ta xét trường hợp $AC < BC$, trường hợp $AC > BC$ làm tương tự

Gọi I là giao điểm của EF và CH . Vì $AEHF$ là hình chữ nhật nên I là trung điểm EF .

Tứ giác $EPQF$ là hình thang vuông (vì $EP, FQ \perp PQ$)

Ta có $IH \parallel EP$ và I là trung điểm EF nên H là trung điểm của PQ .

Khi đó đường tròn đường kính PQ là đường tròn tâm H bán kính HP .

Gọi T là hình chiếu của H trên EF

Ta có $\widehat{PEH} = \widehat{EAH}$ (cùng phụ $\widehat{EHA}$) và $\widehat{TEH} = \widehat{IHE}$, $\widehat{IHE} = \widehat{EAH}$ (cùng phụ với $\widehat{EHA}$.)

Suy ra $\widehat{PEH} = \widehat{TEH}$, suy ra $\triangle PEH = \triangle TEH \Rightarrow HT = HP$

Ta có $HT \perp EF$ ($T \in EF$) và $HT = HP$ nên EF tiếp xúc với đường tròn đường kính PQ

c) Chứng minh $KA.KB = KH^2$ và M thuộc một đường cố định

Ta có $\widehat{KEA} = \widehat{CEF} = \widehat{CHF} = \widehat{CBK}$, suy ra $\triangle KAE \sim \triangle KFB$ (g.g),

Do đó $\frac{KA}{KF} = \frac{KE}{KB} \Rightarrow KA.KB = KE.KF$ (1)

Mặt khác ta có $\widehat{KHE} = \widehat{HCE} = \widehat{HFK}$, suy ra $\triangle KHE \sim \triangle KFH$ (g.g)

Do đó $\frac{KH}{KF} = \frac{KE}{KH} \Rightarrow KE.KF = KH^2$ (2)

Từ (1) và (2) thì $KA.KB = KH^2$

Gọi J là giao điểm của OC và EF ,

Ta có $\widehat{OCF} = \widehat{OBC}$ (tam giác OBC cân tại O)

Và $\widehat{JFE} = \widehat{ICF}$ (do tam giác ICF cân tại I)

Do đó

$$\widehat{OCF} + \widehat{JFE} = \widehat{OBC} + \widehat{ICF} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{CJF} = 90^\circ \Rightarrow OC \perp EF$$

Tam giác CKO có CH và KJ là hai đường cao, cắt nhau tại I nên I là trực tâm của tam giác CKO , do đó $OI \perp CK$ (3)

Mặt khác hai đường tròn (O) và đường tròn tâm I đường kính CH cắt nhau tại C và D , nên OI là đường trung trực của CD , suy ra $OI \perp CD$ (4)

Từ (3) và (4) ta có C, K, D thẳng hàng.

Vậy K cũng là giao điểm của CD và EF , do đó $M \equiv K$ và M luôn thuộc đường thẳng AB cố định