

CONCOURS COMMUN SUP 2000 DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI NANTES

Épreuve spécifique de Mathématiques (filière MPSI)

PROBLÈME D'ANALYSE

PARTIE I

1. La fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$, et on a bien $\forall x, y \in \mathbb{R}, \cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y$, donc $\cos \in E$.

$$2. \quad \text{ch } x \text{ch } y + \text{sh } x \text{sh } y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \times \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \times \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{2e^x e^y + 2e^{-x} e^{-y}}{4} = \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} = \text{ch}(x+y)$$

On en déduit par imparité de la fonction sh que $\text{ch}(x-y) = \text{ch } x \text{ch } y + \text{sh } x \text{sh } y$, puis en additionnant les deux formules membre à membre que $\text{ch}(x+y) + \text{ch}(x-y) = 2 \text{ch } x \text{ch } y$, et enfin que $\text{ch} \in E$.

$$3. \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, f_\alpha(x+y) + f_\alpha(x-y) = f(\alpha(x+y)) + f(\alpha(x-y)) = f(\alpha x + \alpha y) + f(\alpha x - \alpha y) \underset{f \in E}{=} 2f(\alpha x)f(\alpha y) = 2f_\alpha(x)f_\alpha(y)$$

La fonction f_α héritant de la continuité de f , on peut conclure que $\forall \alpha \in \mathbb{R}, f_\alpha \in E$.

4. a. En posant $x = y = 0$, on obtient $2f(0) = 2(f(0))^2$, ce qui entraîne $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

b. En posant $y = 0$, on a alors $\forall x, 2f(x) = 2f(x)f(0)$, d'où $f(0) = 0 \Rightarrow f \equiv 0$.

c. En posant $x = 0$, on obtient aussi $\forall y, f(y) + f(-y) = 2f(0)f(y)$. Donc, si $f(0) = 1$, on a $f(-y) = f(y)$.

f étant définie sur tout $\mathbb{R}$, on en déduit bien que si $f(0) = 1$, alors f est paire.

PARTIE II

A.

1. a. Grâce au changement de variable $u = x + y, dx = du$, on a $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^r f(x+y)dy = \int_x^{x+r} f(u)du$.

b. De même, $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^r f(-x+y)dy = \int_{-x}^{-x+r} f(u)du$. Or l'hypothèse $f(0) = 1$ implique la parité de f , d'après 1.4.c.

Il en résulte que $f(-x+y) = f(x-y)$, et que de plus, en faisant le changement de variable $v = -u$, on a

$$\int_{-x}^{-x+r} f(u)du = \int_{x-r}^x f(v)dv. \quad \text{Par conséquent, en utilisant la relation définitoire de } E, \text{ on obtient:}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2f(x) \int_0^r f(y)dy = \int_0^r 2f(x)f(y)dy = \int_0^r (f(x+y) + f(x-y))dy = \int_x^{x+r} f(u)du + \int_{x-r}^x f(v)dv$$

2. a. Comme $f(0) = 1 > 0$, et que f est continue en 0, f reste strictement positive sur un voisinage $[-r; r]$ de 0.

Il en résulte que pour cette valeur de $r, \int_0^r f(y)dy > 0$.

b. f est continue sur $\mathbb{R}$, donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit F l'une d'entre elles. F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Alors } \int_x^{x+r} f(u)du + \int_{x-r}^x f(v)dv = \int_{x-r}^{x+r} f(u)du = F(x+r) - F(x-r)$$

. D'après 1.b. et 2.a.:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{F(x+r) - F(x-r)}{2 \int_0^r f(y) dy}$$

f apparaît donc comme une combinaison linéaire de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. D'où $f \in C^1(\mathbb{R})$.

c. On déduit de la question précédente que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, puis qu'il en est de même pour f .

Par une récurrence immédiate, on démontre alors que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

d. En reprenant la relation établie en b., et en posant $c = 2 \int_0^r f(y) dy > 0$, on obtient par dérivation que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, cf'(x) = f(x+r) - f(x-r)$$

3. En redérivant la relation obtenue en 2.d., on a $c^2 f''(x) = cf'(x+r) - cf'(x-r)$.

En utilisant encore 2.d. on obtient $c^2 f''(x) = (f(x+2r) - f(x)) - (f(x) - f(x-2r)) = -2f(x) + (f(x+2r) + f(x-2r))$.

Enfin, en appliquant la relation définitoire de $\underline{E}$, on arrive à $c^2 f''(x) = -2f(x) + 2f(x)f(2r)$.

En posant $\lambda = 2 \frac{f(2r)-1}{c^2}$, on montre donc bien que: $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \lambda x$.

B.

1. i) $\mu > 0 \rightarrow \left\{ (x \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \mid \alpha \cosh x\sqrt{\mu} + \beta \sinh x\sqrt{\mu}), \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

ii) $\mu < 0 \rightarrow \left\{ (x \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \mid \alpha \cos x\sqrt{-\mu} + \beta \sin x\sqrt{-\mu}), \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

iii) $\mu = 0 \rightarrow \left\{ (x \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \mid \beta x + \alpha), \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

2. Les éléments non identiquement nuls de $\underline{E}$ sont à chercher parmi les fonctions de l'une des trois formes ci-dessus, vérifiant $f(0) = 1$ et paires (d'après I.4.c.). Distinguons les trois cas i), ii) et iii):

i) La parité impose $\beta = 0$ et la condition $f(0) = 1$ impose $\alpha = 1$. Réciproquement, d'après les questions I.2. et I.3., les fonctions du type $x \in \mathbb{R} \mid \cosh x\sqrt{\mu} (= \cosh x(-\sqrt{\mu}))$ conviennent toutes.

ii) La parité impose $\beta = 0$ et la condition $f(0) = 1$ impose $\alpha = 1$. Réciproquement, d'après les questions I.1. et I.3., les fonctions du type $x \in \mathbb{R} \mid \cos x\sqrt{-\mu} (= \cos x(-\sqrt{-\mu}))$ conviennent toutes.

iii) La parité impose $\beta = 0$ et la condition $f(0) = 1$ impose $\alpha = 1$. Réciproquement, la fonction constante égale à 1 vérifie bien la relation $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.

En conclusion: $E = \{x \in \mathbb{R} \mid \cosh \lambda x; x \in \mathbb{R} \mid \cos \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}^+\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid 1\}$.

3. Il en résulte immédiatement que $F = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}^+\}$.

PARTIE III

A.

1. Comme f n'est pas la fonction nulle, on démontre comme en I.4.a. et I.4.b. que $f(0) = 1$.

de même, on démontre comme en I.4.c. que f est paire. Or, par définition de $\underline{E}$, f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$, et ce n'est pas en 0. Il en résulte par parité que f admet au moins un zéro strictement positif.

2. E est un ensemble non vide de réels (d'après la question précédente), minoré par 0.

Par conséquent, E admet une borne inférieure.

3. On sait qu'il existe une suite u d'éléments de E qui converge vers a . Comme f est continue en a , $f(u) \rightarrow f(a)$. Mais la suite $f(u)$ est la suite nulle, par définition de E . Donc $f(a) = 0$. Comme $f(0) = 1$, on en déduit que $a \geq 0$.
4. S'il existait $x_0 \in [0; a[$ tel que $f(x_0) \leq 0$, alors on aurait $f(0)f(x_0) \leq 0$, et grâce à la continuité de f , on pourrait appliquer le théorème des valeurs intermédiaires: il existerait $x_1 \in [0; x_0] \subset [0; a[$, tel que $f(x_1) = 0$. ce serait en contradiction avec le fait que a est le plus petit élément de E . Donc $\forall x \in [0; a[f(x) > 0$.

B.

1. a. Soit $q \in \mathbb{N}$. Il suffit d'appliquer la relation $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ à $x = y = \frac{a}{2^{q+1}}$ pour obtenir (car $f(0) = 1$):

$$f\left(\frac{a}{2^q}\right) + 1 = 2 \left[f\left(\frac{a}{2^{q+1}}\right) \right]^2$$

- b. La formule bien connue $\cos \alpha = 2 \left(\cos \frac{\alpha}{2} \right)^2 - 1$ montre que la fonction g vérifie également la relation encadrée

$$f\left(\frac{a}{2^0}\right) = g\left(\frac{a}{2^0}\right).$$

ci-dessus pour f . Il suffit donc pour amorcer une récurrence triviale de vérifier que

$$\text{Or } g(a) = \cos\left(\frac{\pi}{2a} \cdot a\right) = 1 = f(a) \quad , \quad \forall q \in \mathbb{N}, f\left(\frac{a}{2^q}\right) = g\left(\frac{a}{2^q}\right) . \text{ De même, on montre}$$

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, f\left(p \frac{a}{2^q}\right) = g\left(p \frac{a}{2^q}\right) .$$

2. Les fonctions de E étant paires (d'après I.4.c.), le résultat $\forall p, q \in \mathbb{N}, f\left(p \frac{a}{2^q}\right) = g\left(p \frac{a}{2^q}\right)$ s'étend à tout $p \in \mathbb{Z}$. Cela se traduit alors par: $\forall x \in D_a, f(x) = g(x)$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe une suite (x_n) d'éléments de D_a qui converge vers x . Par continuité de f et de g en x , les suites $f(x_n)$ et $g(x_n)$ convergent respectivement vers $f(x)$ et $g(x)$. Or les suites $f(x_n)$ et $g(x_n)$ sont égales, d'après 2.

Par unicité de la limite, on en déduit que $f(x)$ et $g(x)$. Comme c'est vrai pour tout x , on a bien $f = g$.

C.

D'après la question précédente, les fonctions de F sont toutes des fonctions du type $x \mapsto \cos \omega x$. Et réciproquement, toutes ces fonctions conviennent: elles appartiennent à E par I.1. et I.3., et vérifient bien les conditions spécifiques

aux éléments de F . On retrouve donc que $F = \{x \mapsto \cos \omega x, \omega \in \mathbb{R}^{+*}\}$.

PROBLÈME D'ALGÈBRE

PARTIE I : Généralités, exemples

1. a. $T(\alpha(m_{i,j}) + \alpha'(m'_{i,j})) = T(\alpha m_{i,j} + \alpha' m'_{i,j}) = \sum_{k=1}^n (\alpha m_{k,k} + \alpha' m'_{k,k}) = \alpha \sum_{k=1}^n m_{k,k} + \alpha' \sum_{k=1}^n m'_{k,k} = \alpha T(m_{i,j}) + \alpha' T(m'_{i,j})$
 Il en résulte que T est (une forme) linéaire.
 $T_U(\alpha M + \alpha' M') = T(U(\alpha M + \alpha' M')) \stackrel{\text{linéarité de } T}{=} \alpha T(UM) + \alpha' T(UM') = \alpha T_U(M) + \alpha' T_U(M')$
 b. , donc $T_U \in E^*$.
 c. $\text{Ker } T_U = H_U$, et par conséquent H_U est un sous-espace vectoriel de E .

2. a. $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $(E_{1,1}; E_{1,2}; E_{2,1}; E_{2,2})$ est la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.
 b. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$ et $T\left(\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}\right) = a+b+c+d$, donc $H_U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), a+b+c+d=0 \right\}$.
 c. $T_U(I_2) = 4 \neq 0$, donc $\dim \text{Im } T_U \geq 1$. Mais d'autre part $\text{Im } T_U \subset \mathbb{R} \Rightarrow \dim \text{Im } T_U \leq 1$. Finalement $\dim \text{Im } T_U = 1$.
 La dimension de $M_2(\mathbb{R})$ étant 4, et T_U étant linéaire, le théorème du rang permet d'affirmer que $\dim \text{Ker } T_U = 3$.
 Or $\text{Ker } T_U = H_U$, donc $\dim H_U = 3$.
 d. La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible (car diagonale à coefficients tous $\neq 0$) et dans H_U , donc $H_U \cap GL_2(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

PARTIE II : Quelques résultats utiles pour la suite

1. a. $T((a_{i,j}) \times (b_{i,j})) = T\left(\sum_{m=1}^n a_{i,m} b_{m,j}\right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{m=1}^n a_{k,m} b_{m,k}\right) \stackrel{\text{intersion des } \Sigma}{=} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{m=1}^n a_{k,m} b_{m,k}\right) \stackrel{\text{intersion des } \Sigma}{=} \sum_{i \leftarrow m, j \leftarrow k} \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n a_{j,i} b_{i,j}$
 b. ${}^t A = (a_{j,i}) \Rightarrow T({}^t A.B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j}$
 (I₁)
 $T(B.A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (b_{j,i} a_{i,j}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{i,j} b_{j,i}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (a_{i,j} b_{j,i}) \stackrel{i \leftrightarrow j}{=} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{j,i} b_{i,j} = T(A.B)$
 (I₂)
 2. a. Si $U = 0$, alors $T = 0$ et $H_U = E$, donc $\dim H_U = n^2$.
 b. Sinon, U possède au moins un terme non nul. Soit (j_0, i_0) l'indice de ce terme.
 Comme le produit de U à droite par la matrice $E_{i_0 j_0}$ est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles, sauf celle de rang j_0 , qui contient la colonne de rang i_0 de U , le seul élément diagonal non nul de ce produit est le terme diagonal d'ordre j_0 , qui vaut précisément celui d'indice (j_0, i_0) de U . Il en résulte que $T_U(E_{i_0 j_0}) \neq 0$.
 Par suite, T_U est une forme linéaire non nulle sur E , dont le noyau H_U est de dimension $n^2 - 1$.
 3. a. $T_{i,j}(E_{k,l}) = T(E_{j,i} \cdot E_{k,l}) = T({}^t E_{i,j} \cdot E_{k,l})$. D'après (I₁), on obtient la somme des produits des termes de même indice de $E_{i,j}$ et $E_{k,l}$. Pour qu'un tel produit soit non nul, il faut et il suffit que chacun de ses facteurs soit égal à 1. Cela ne peut se produire que si $(i,j) = (k,l)$, et dans ce cas il existe dans la somme un unique produit valant 1, les autres étant nuls. On peut en déduire que $T_{i,j}(E_{k,l}) = \begin{cases} 0 & \text{si } (i,j) \neq (k,l) \\ 1 & \text{si } (i,j) = (k,l) \end{cases} = \delta_{(i,j),(k,l)}$ (symbole de Kronecker).

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{i,j} T_{i,j} = 0_{E^*}$$

b. Supposons que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{i,j} T_{i,j} = 0_{E^*}$. Alors en appliquant cette relation à chaque matrice $E_{k,l}$, on obtient

$$\forall (k,l) \in [1;n]^2, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{i,j} T_{i,j}(E_{k,l}) = 0 \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{i,j} T_{i,j}(E_{k,l}) = \lambda_{k,l} \cdot 1 = \lambda_{k,l}$$

. Or d'après la question précédente,

on en déduit que la famille des $T_{i,j}$ est libre dans E^* . Comme elle possède n^2 éléments, et que $\dim E^* = n^2$, on peut conclure que les formes $T_{i,j}$ forment une base de E^* .

4. L'application ϕ est linéaire. En effet (on utilise la linéarité de T):

$$[\phi(\alpha U + \alpha' U')](M) = T_{\alpha U + \alpha' U'}(M) = T((\alpha U + \alpha' U').M) = \alpha T(U.M) + \alpha' T(U'.M) = (\alpha T_U + \alpha' T_{U'})(M) = [\alpha \phi(U) + \alpha' \phi(U')](M)$$

Cette relation étant vraie pour tout $M \in E$, on a bien l'égalité entre les formes $\phi(\alpha U + \alpha' U')$ et $\alpha \phi(U) + \alpha' \phi(U')$.
De plus, elle transforme la base canonique des matrices élémentaires de E en la base des $T_{i,j}$.
On en conclut que ϕ est un isomorphisme de E vers E^* .

5. a. Par définition d'un hyperplan d'un espace vectoriel de dimension finie, la dimension de H vaut $n^2 - 1$.

b. $A \notin H \Rightarrow H \cap \text{vect}(A) = \{0\}$. Or $A \neq 0$, donc $\dim \text{vect}(A) = 1$. D'après la formule de Grassmann, on en déduit que la dimension de $H + \text{vect}(A)$ vaut $n^2 - 1 + 1 = n^2$. Donc $H + \text{vect}(A) = E$, et finalement $E = H \oplus \text{vect}(A)$.

c. On sait qu'on peut définir une application linéaire par ses restrictions sur deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Ainsi, la forme linéaire l dont la restriction à H est nulle et qui envoie A sur 1, admet bien H comme noyau.

d. Soit U l'antécédent de l par ϕ . On a alors $H = \text{Ker } l = \text{Ker } T_U = H_U$. Donc $\exists U \in E, H = H_U$.

PARTIE III : Le résultat général

1. a. Si on considère l'endomorphisme de $\mathbb{M}^n$ canoniquement associé à P , cet endomorphisme envoie la base canonique $\{\varepsilon_1; \varepsilon_2; \dots; \varepsilon_n\}$ de $\mathbb{M}^n$ sur la famille $\{\varepsilon_2; \dots; \varepsilon_n; \varepsilon_1\}$. Il transforme donc une base de $\mathbb{M}^n$ en une base de $\mathbb{M}^n$. Il en résulte que P est inversible.

b. Comme ${}^t R_r = R_r$, la formule (I₁) nous permet de calculer $T_{R_r}(P) = T({}^t R_r.P) = \sum_{i=1}^r p_{r,r} = 0$. Donc $P \in H_{R_r}$.

2. D'après II.5.d., tout hyperplan H de E est de la forme H_U pour une certaine matrice non nulle U .

Si on désigne par $r \in [1;n]$ le rang de U , alors d'après 1.b., la matrice P appartient à H_{R_r} , donc $T(R_r.P) = 0$.

Comme R_r peut s'écrire sous la forme $S_1.U.S_2$, on a $T((S_1.U.S_2).P) = 0$.

Mais $T((S_1.U.S_2).P) = T(S_1.(U.S_2.P))$, qu'on peut d'après (I₂) aussi écrire $T((U.S_2.P).S_1)$, puis $T(U.(S_2.P.S_1))$.

Il en résulte que $T(U.(S_2.P.S_1)) = 0$, et par conséquent que $S_2.P.S_1 \in H_U = H$.

Mais S_1 et S_2 étant inversibles, $S_2.P.S_1$ l'est aussi, ce qui achève la démonstration du résultat général:

Tout hyperplan de E contient au moins une matrice inversible