Chapitre A3
Nombres rationnels

I. Rappels sur les fractions

*Un nombre **rationnel** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers ($b\neq0$).*

*Dans l'écriture $\frac{a}{b}$, a est le **numérateur** et b est le **dénominateur**.*

Exemples

3 est rationnel car il peut s'écrire sous la forme $\frac{3}{1}$.

$2,54 = \frac{254}{100}$ *est rationnel.*

$\frac{6}{5}$ *est l'**écriture fractionnaire** de 1,2.*

*π et $\sqrt{2}$ ne sont pas des nombres rationnels : ils sont **irrationnels**.*

Preuve

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe deux entiers a et b ($b\neq0$) tels que $\frac{a}{b}$ est irréductible et égale $\sqrt{2}$.

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

$$\sqrt{2}^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

Donc $a^2 = 2b^2$

On en déduit que a^2 est pair donc a est pair. Si a est pair, il peut s'écrire sous la forme $a = 2d$ où d est un entier.

$$a^2 = (2d)^2 = 4d^2$$

Donc $4d^2 = 2b^2$

Et donc $2d^2 = b^2$

On en déduit que b^2 est pair donc b est pair.

*Si a et b sont pairs, on peut simplifier la fraction $\frac{a}{b}$ par 2, ce qui contredit le fait que $\frac{a}{b}$ est irréductible et donc l'hypothèse de départ. **Il n'existe donc aucune fraction entière égale à $\sqrt{2}$.***

II. Opérations sur les fractions

Propriété 1

Soit a, b et c des nombres réels ($c\neq0$) :

$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

Remarque

Lorsque l'on **additionne** deux fractions de dénominateurs différents, on doit d'abord les mettre **sur le même dénominateur**.

$\frac{1}{3} + \frac{9}{24} = \frac{1\times8}{3\times8} + \frac{9}{24} = \frac{8}{24} + \frac{9}{24} = \frac{8+9}{24} = \frac{17}{24}$

Propriété 2
Soit a, b, c et d des nombres réels ($c\neq0$ et $d\neq0$).
$a\times\frac{b}{c}=\frac{a\times b}{c}$
$\frac{a}{c}\times\frac{b}{d}=\frac{a\times b}{c\times d}$

Exemples
$A=\frac{-1}{3}\times\frac{-2}{5}=\frac{(-1)\times(-2)}{3\times5}=\frac{2}{15}$

$B=\frac{-2}{-9}\times(-\ 6)=\frac{-2\times(-6)}{-9}=-\frac{2\times2\times3}{3\times3}=-\frac{4}{3}$

Propriété 3
Diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse.

Exemples
$C=\frac{4}{5}:3=\frac{4}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{4\times1}{5\times3}=\frac{4}{15}$

$D=\frac{3}{7}:\frac{4}{5}=\frac{3}{7}\times\frac{5}{4}=\frac{3\times5}{7\times4}=\frac{15}{28}$

Remarques : le signe « : » peut parfois être remplacé par l'écriture fractionnaire : le **plus grand trait de fraction** correspond au calcul à **effectuer en dernier**.
Par exemple, les nombres E et F peuvent s'écrire :
$E=\frac{4}{5}:3=\frac{\frac{4}{5}}{3}$

$F=\frac{3}{7}:\frac{4}{5}=\frac{\frac{3}{7}}{\frac{4}{5}}$

La position du trait de fraction principal (le plus grand trait qui détermine la dernière opération à effectuer) détermine le calcul. Il se place au niveau du signe « = ». Si on l'inverse avec un autre trait de fraction, le résultat du calcul en est changé.
Exemples
$G=\frac{\frac{8}{4}}{2}=\frac{8}{4}:2=2:2=1$
$H=\frac{8}{\frac{4}{2}}=8:\frac{4}{2}=8:2=4$

Exemple type brevet
$I=\frac{\frac{7}{12}+\frac{3}{8}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{6}}=\frac{\frac{14}{24}+\frac{9}{24}}{\frac{9}{12}-\frac{2}{12}}=\frac{23}{24}:\frac{7}{12}=\frac{23}{24}\times\frac{12}{7}=\frac{23}{12\times2}\times\frac{12}{7}=\frac{23}{14}$

Remarque : le dénominateur commun à deux fractions peut être trouvé en utilisant la touche PPCM (Plus Petit Commun multiple) de la calculatrice.
Si l'on veut trouver le dénominateur commun aux fractions $\frac{7}{12}$ et $\frac{3}{8}$, on tape alors PPCM (12 ;8).