Chapitre A3
Nombres rationnels

I. Rappels sur les fractions

*Un nombre **rationnel** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers ($b \neq 0$).*

*Dans l'écriture $\frac{a}{b}$, a est le **numérateur** et b est le **dénominateur**.*

Exemples

3 est rationnel car il peut s'écrire sous la forme $\frac{3}{1}$.

$2,54 = \frac{254}{100}$ *est rationnel.*

$\frac{6}{5}$ *est l'**écriture fractionnaire** de 1,2.*

π *et* $\sqrt{2}$ *ne sont pas des nombres rationnels : ils sont **irrationnels**.*

Preuve

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe deux entiers a et b ($b \neq 0$) tels que $\frac{a}{b}$ est irréductible et égale $\sqrt{2}$.

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

$$\sqrt{2}^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

Donc $a^2 = 2b^2$

On en déduit que a^2 *est pair donc a est pair. Si a est pair, il peut s'écrire sous la forme* $a = 2d$ *où d est un entier.*

$$a^2 = (2d)^2 = 4d^2$$

Donc $4d^2 = 2b^2$

Et donc $2d^2 = b^2$

On en déduit que b^2 *est pair donc b est pair.*

*Si a et b sont pairs, on peut simplifier la fraction $\frac{a}{b}$ par 2, ce qui contredit le fait que $\frac{a}{b}$ est irréductible et donc l'hypothèse de départ. **Il n'existe donc aucune fraction entière égale à** $\sqrt{2}$.*

II. Opérations sur les fractions

Propriété 1

Soit a, b et c des nombres réels ($c \neq 0$) :

$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

Remarque

Lorsque l'on **additionne** deux fractions de dénominateurs différents, on doit d'abord les mettre **sur le même dénominateur**.

$\frac{1}{3} + \frac{9}{24} = \frac{1\times8}{3\times8} + \frac{9}{24} = \frac{8}{24} + \frac{9}{24} = \frac{8+9}{24} = \frac{17}{24}$

Propriété 2

Soit a, b, c et d des nombres réels ($c \neq 0$ et $d \neq 0$).

$a \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c}$

$\frac{a}{c} \times \frac{b}{d} = \frac{a \times b}{c \times d}$

Exemples

$A = \frac{-1}{3} \times \frac{-2}{5} = \frac{(-1) \times (-2)}{3 \times 5} = \frac{2}{15}$

$B = \frac{-2}{-9} \times (-6) = \frac{-2 \times (-6)}{-9} = -\frac{2 \times 2 \times 3}{3 \times 3} = -\frac{4}{3}$

Propriété 3

Diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse.

Exemples

$C = \frac{4}{5} : 3 = \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{4 \times 1}{5 \times 3} = \frac{4}{15}$

$D = \frac{3}{7} : \frac{4}{5} = \frac{3}{7} \times \frac{5}{4} = \frac{3 \times 5}{7 \times 4} = \frac{15}{28}$

Remarques : le signe « : » peut parfois être remplacé par l'écriture fractionnaire : le **plus grand trait de fraction** correspond au calcul à **effectuer en dernier**.

Par exemple, les nombres E et F peuvent s'écrire :

$E = \frac{4}{5} : 3 = \frac{\frac{4}{5}}{3}$

$F = \frac{3}{7} : \frac{4}{5} = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{4}{5}}$

La position du trait de fraction principal (le plus grand trait qui détermine la dernière opération à effectuer) détermine le calcul. Il se place au niveau du signe « = ». Si on l'inverse avec un autre trait de fraction, le résultat du calcul en est changé.

Exemples

$G = \frac{\frac{8}{4}}{2} = \frac{8}{4} : 2 = 2 : 2 = 1$

$H = \frac{8}{\frac{4}{2}} = 8 : \frac{4}{2} = 8 : 2 = 4$

Exemple type brevet

$I = \frac{\frac{7}{12} + \frac{3}{8}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{6}} = \frac{\frac{14}{24} + \frac{9}{24}}{\frac{9}{12} - \frac{2}{12}} = \frac{23}{24} : \frac{7}{12} = \frac{23}{24} \times \frac{12}{7} = \frac{23}{12 \times 2} \times \frac{12}{7} = \frac{23}{14}$

Remarque : le dénominateur commun à deux fractions peut être trouvé en utilisant la touche PPCM (Plus Petit Commun multiple) de la calculatrice.

Si l'on veut trouver le dénominateur commun aux fractions $\frac{7}{12}$ et $\frac{3}{8}$, on tape alors PPCM (12 ;8).