ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАНИЯ

№ 1. Числа, цифры и делимость

1. На доске написано число 202. Какую цифру надо приписать в конце, чтобы полученное число делилось на а) 8, б) 11, в) 23?
2. На доске написано число X, которое состоит из *n* цифр. При каких *n* всегда к числу можно приписать одну цифру в конце, чтобы полученное число делилось на а) 8, б) 11, в) 23?
3. На доске написано трехзначное число X. Всегда ли к числу можно приписать одну цифру в конце и одну цифру в начале, чтобы полученное пятизначное число делилось на а) 72, б) 44, в) 23?
4. На доске написано трехзначное число X.

а) В этом числе можно приписать одну цифру между первой и второй цифрой или одну цифру между второй и третьей, а также одну цифру в начале и одну цифру конце. Верно ли, что для любого X таким образом можно получить шестизначное число, которое делиться на 2024?

б) А если в отличие от пункта а) можно вставить одну цифру между первой и второй, еще одну между второй и третьей и еще по одной добавить в начало и в конец, верно ли тогда, что для любого X полученное семизначное число будет делиться на 2024?

в) В случае, если у вас в пунктах а) и(или) б) ответ отрицательный, то найдите наибольший делитель *d* числа 2024 такой, что для любого X можно получить таким образом число, которое делиться на d.

5. На доске написано трехзначное число X и некоторое натуральное число *t*. Известно, что если к числу X приписать любую цифру в конце и любую цифру в начале, то полученное пятизначное число не будет делиться на число *t*.

а) Найдите, все возможные значения числа *t*, меньшие 50, для которых выполняется это условие.

б) Найдите наименьшее простое *t*, для которого выполняется это условие.

6. Для каких простых чисел *p* выполняется следующее условие: к любому числу больше 100 можно приписать по одной цифре в начале и в конце его десятичной записи так, чтобы полученное число делилось на *p*?
7. Предложите свои обобщения или направления исследований в этой задаче и изучите их (возможно, вы сможете провести исследование некоторых пунктов этой задачи в общем случае, т.е. для произвольных X, *t* и(или) *p*, указанных в этих пунктах).

№ 2. Поиск периметра

Многоугольник, стороны которого не пересекаются (в частности, не имеют общих точек, т.е. «не касаются даже углами») и любые две смежные стороны являются перпендикулярными, будем называть *простым*.

1. По данным рисунка 1 найдите периметр этого простого многоугольника.
2. На рисунке изображен простой многоугольник, периметр которого равен 66. По данным рисунка 2 найдите длину стороны, отмеченной знаком x.
3. Аня хочет найти периметр простого многоугольника, изображенного на рисунке 3. Для этого она измерила длину стороны s_1. Какое наименьшее количество отрезков ей надо ещё измерить, чтобы найти периметр?

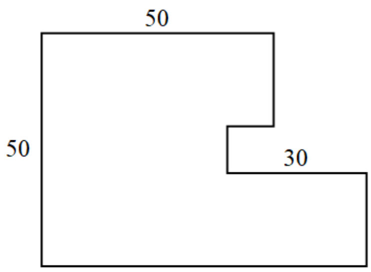

Рис. 1

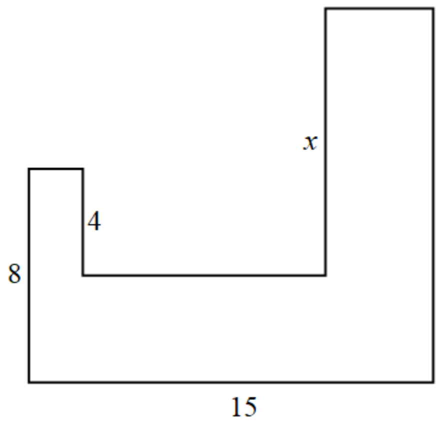

Рис. 2

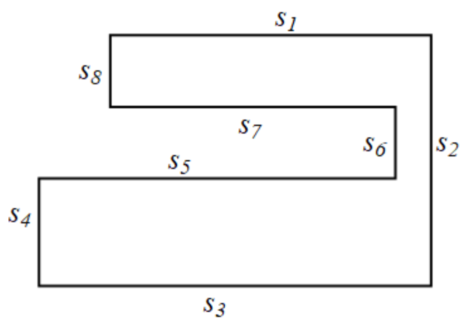

Рис. 3

4. а) Какое наименьшее количество сторон надо измерить в простом восьмиугольнике, чтобы гарантированно найти его периметр?

б) Попробуйте указать условия (опишите вид и параметры восьмиугольника), при которых нужно знать именно такое количество сторон, которое вы получили при решении пункта а).

в) Возможно существуют восьмиугольники, для определения периметра которых достаточно знать длины меньшего количества сторон, чем вы получили в пункте а). Опишите множества таких восьмиугольников.

5. Изучите вопросы пункта 4 для других простых многоугольников (количество сторон задайте сами).
6. Попробуйте изучить вопросы пункта 4 в общем случае (т.е. построить необходимые алгоритмы или найти формулы для вычисления периметров произвольных простых многоугольников, оценить число сторон, длины которых нужно знать в различных случаях применения алгоритмов или формул).
7. Предложите свои обобщения или направления исследований в этой задаче и изучите их.

№ 3. Игра

I. На доске $1\times n$ Аня и Боря играют в следующую игру: они по очереди (Аня ходит первой) кладут монетку в клетки доски, при условии, что и сама клетка и соседние с ней клетки тоже пусты. Тот, кто не может сделать ход, тот проиграл.

1. Докажите, что для любого нечётного n, у Ани есть выигрышная стратегия.
2. Докажите, что при $n = 6$ у Ани есть выигрышная стратегия.
3. Докажите, что при $n = 8$ у Бори есть выигрышная стратегия.
4. При каких значениях n у Ани есть выигрышная стратегия? При каких значениях n у Бори есть выигрышная стратегия?

II. Игра такая же, как и в пункте I, но монетку можно класть на клетку доски при условии, что и сама клетка, и r клеток справа от неё, и l клеток слева от неё пусты (лево для Ани и Бори находится с одной стороны доски). При $r = l = 1$ получаем игру из пункта I.

5. Попробуйте найти все значения n для которых у Ани есть выигрышная стратегия при $r = 1, l = 2$.
6. Попробуйте найти все значения n для которых у Ани есть выигрышная стратегия при каких-то фиксированных r и l.

III. На доске $m\times n$ Аня и Боря играют в следующую игру: они по очереди (Аня ходит первой) кладут монетку в клетки доски, при условии, что и сама клетка и соседние с ней клетки тоже пусты (соседними считаются клетки, имеющие общую сторону). Тот, кто не может сделать ход, тот проиграл.

7. Определите значения m и n, при которых а) у Ани, б) у Бори есть выигрышная стратегия.

IV. Предложите свои обобщения или направления исследований в этой задаче и изучите их.

№ 4. Большая перемена

Арсений и Егор играют в следующую игру. Для игры для первого раза берётся ненулевое целое число a_1, после чего каждый день на большой перемене мальчики всю перемену по очереди делят имеющееся на данный момент число на некое k (старое число убирается). На той перемене, на которой после деления получается нецелое число, игра завершается и на следующей перемене начинается новая игра для нового числа, т.е. вторая игра для числа a_2, потом аналогично третья игра для числа a_3, и т.д.

Вместо обеда за игрой наблюдает Кирилл, терпения которого хватает на наблюдение за первыми m переменами для каждой игры (т.е. для каждого числа a_n, $n = 1,2,3, \ldots$). Когда у Кирилла заканчивается терпение (т.е. на $(m + 1)$-й перемене, если не началась новая игра), то Кирилл вспоминает, что он долго пропускал обед, и объявляет, что он голодал на этой игре (и ничего не объявляет, если увидел конец игры, когда у него ещё было терпение).

1. Пусть $a_n = a_1 + b(n-1)$, где b — нечётное число, и $k = 2$.
   a) Найдётся ли такая игра, в которой Кирилл голодал?
   b) Если ответ в предыдущем пункте: «да», то как часто (т.е. на каких номерах игр) Кирилл будет голодать?
2. Пусть k = 3 и

$$a_n = (n + 1)(n + 2)\cdot\ldots\cdot(n + 2n).$$

Сколько перемен будет длиться игра?

3. Пусть p — простое число. Ответьте на вопрос пункта 2, если $k = p$,

$$a_n = (n + 1)(n + 2)\cdot\ldots\cdot(n + (p - 1)n).$$

4. Арсений и Егор решили играть для $k = 3$ со следующей последовательностью: $a_1 = 1^2 + 2^2$, $a_n = a_{n-1} + (3n-2)^2 + (3n-1)^2$, при этом параллельно с ними по таким же правилам для того же $k = 3$ играет Кирилл для последовательности $b_n = n$, если кто-то закончит раньше, он наблюдает за второй игрой и лишь, когда закончились обе игры все мальчики берут новые числа (это пункт никак не связан с вопросом «голодания» Кирилла).
   a) Кто закончит раньше в n-ой игре?
   b) А если $a_1 = 1^3 + 2^3$ и $a_n = a_{n-1} + (3n-2)^3 + (3n-1)^3$?

5. Арсений и Егор решили менять число k, поэтому для i-ой игры оно равно k_i, причём все k_i — простые числа. $a_1 = (1^2 + 1)$, $a_n = a_{n-1}(n^2 + 1)$. Оказалось что для всех n верно $k_n > 2n$. Может ли оказаться так, что на какой-то игре Кирилл голодал, если его терпения хватает на две перемены (т.е. здесь m =2)?

6. Арсений и Егор решили сохранить условие на k_i, однако заменили a_n и взяли последовательность $a_1 = 1^3 + 1$, $a_n = (n^3 + 1)a_{n-1}$. Докажите что Кирилл не будет голодать, если его терпение осталось таким же как в пункте 5.

7. В предыдущем пункте укажите оценку на k_n, если терпения Кирилла хватает на три перемены.
8. Предложите свои обобщения и другие направления исследования.

№ 5. Откладываем и измеряем отрезки

1. Имеется линейка длиной 9 см без делений. Какое наименьшее число промежуточных делений нужно нанести на линейку, чтобы можно было отложить или измерить любой отрезок длиной 1 см, 2 см, 3 см, … или 9 см, прикладывая линейку лишь один раз (в каждом случае)? Ответ объясните.
2. Имеется линейка длиной 13 см без делений. Какое наименьшее число промежуточных делений нужно нанести на линейку, чтобы можно было отложить все отрезки длиной 1 см, 2 см, 3 см, …, 10 см, 11 см, 12, 13 см, прикладывая линейку лишь один раз (в каждом случае)?
3. Исследуйте задачу, подобную пунктам 1 и 2, для линеек с другими длинами.
4. **А)** Имеется веревочка длиной 9 см. На ней можно завязать маленькие узелки на определенных расстояниях от краев, для того, чтобы с помощью такой веревочки можно было измерять расстояния (например, если завязать узелок на расстоянии 1 см от левого края, то можно измерить отрезок, равный 8 см). Каждый завязанный узелок не меняет длины веревочки. Какое наименьшее число узелков требуется завязать, чтобы можно было измерить все расстояния длиной 1 см, 2 см, 3 см, …, 9 см, прикладывая веревочку лишь один раз? (Разрешается сгибать веревочку, но только один раз и в том месте, где завязан узелок)?

Б) Рассмотрим задачу, аналогичную пункту **А)** с веревочкой длиной 13 см, причем отмерить нужно все расстояния, равные 1 см, 2 см, …, 13 см. Вновь прикладывать веревочку можно лишь один раз, но сгибать ее на этот раз можно не более одного раза в любом месте веревочки.

5. Исследуйте задачу, подобную пунктам 4. А) и Б) для веревочек с другими длинами.
6. Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их

№ 6. Производная от числа

В старших классах вы изучите понятие производной от функции, в частности, узнаете, что производная от числа, т.е. от функции, тождественно равной некоторому числу, равняется нулю.

Попробуем ввести определение арифметической производной, отталкиваясь от некоторых исходных значений и свойств (*аксиом*). Например, так: для произвольного

целого или рационального числа m, назовем число $D(m)$ – арифметической производной от этого числа m, если выполняются следующие свойства:
· $D(0) = D(1) = 0$;
· $D(p) = 1$ для любого простого числа p;
· $D(m \cdot n) = n \cdot D(m) + m \cdot D(n)$;
· $D(-n) = -D(n)$;
· $D\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{nD(m) - mD(n)}{n^2}$;

Проверьте непротиворечивость введенных свойств (аксиом) и изучите следующие вопросы:

1. Найдите значение $D(m^n)$.

2. Выясните, когда НОД($D(m)$; m) ≠ 1, НОД($D(m)$; m) = 1.

3. Найдите другие свойства $D(m)$.

4. Если $D(m) = D(x) \cdot D(y)$ для некоторых целых или рациональных x и y, то назовём такую производную составной, в противном случае – простой (т.е. если $D(m)$ нельзя представить в виде произведения производных некоторых двух чисел, каждая из которых не равна 1; или если по-другому сказать, для этих значений по сути возможно только такое представление: $D(m) = D(m) \cdot 1$).
Единственно ли разложение составных производных? Если нет, то сколько разложений можно получить для каждого m?

5. Существуют ли такие целые m, n, такие что
а) $D(m) = m$?
б) $D(m) \cdot D(n) = m \cdot n$?
в) $\frac{D(m)}{D(n)} = \frac{m}{n}$?
г) $D\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}$;
д) $D(m \pm n) = D(m) \pm D(n)$?
Для всех пунктов а) – д) (в случае положительного ответа) попробуйте найти множество всех значений m или пар значений (m,n), удовлетворяющих соответствующему равенству.

6. Назовём "близнецами" числа с одинаковыми производными. Найдите все числа "близнецы" для произвольного $N \in Z$. В частности, может ли натуральное (или целое) число иметь в качестве "числа-близнеца" обыкновенную дробь с неравным 1 знаменателем?

7. Предложите свои вопросы, обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их

№ 7. Ещё раз об угадывании

I. Мудрец предлагает сыграть вам в следующую игру: он загадал два натуральных числа A и B от 1 до 10 включительно (числа могут совпадать). На каждом ходу вы можете назвать два числа a и b, и получить в ответ число, равное $|A - a| + |B - b|$.

а) Как за два хода гарантированно узнать числа мудреца?

б) Покажите, что за два хода числа A и B можно узнать и в том случае, если они произвольные положительные числа.

в) Придумайте, как за два хода узнать числа A и B можно узнать и в том случае, если известно такое число m (необязательно положительное), что $m \leq A$, $m \leq B$.

г) Какое наименьшее количество ходов потребуется, если мудрец задумал три положительных числа: A, B и C; вы за ход называете три числа: a, b, c, и получаете в ответ число, равное

$$|A - a| + |B - b| + |C - c|.$$

д) Обобщите пункт г) на случай большего количества задуманных чисел.

II. Мудрец предлагает сыграть вам в другую игру: он загадал два числа A и B (числа могут совпадать). На каждом ходу вы можете назвать два числа a и b, и получить в ответ число, равное $aA + bB$.

а) За какое наименьшее количество ходов Вы сможете угадать задуманные натуральные числа A и B?

б) За какое наименьшее количество ходов Вы сможете угадать задуманные целые числа A и B, если Вам известны такие m и M, что $m \leq A, B \leq M$.

в) Обобщите пункты а) и б) на случай большего количества задуманных чисел.

г) За какое наименьшее количество ходов Вы сможете угадать а) 3, б) 4, в) n рациональных чисел.

III. а) Можно ли в пункте I.а) справиться за два хода (A и B — положительные), если в ответ на числа a и b мудрец называет

1) $(|A - a|, |B - b|)$;

2) $\frac{1}{2} \cdot \frac{|A-a|}{1+|A-a|} + \frac{1}{4} \cdot \frac{|B-b|}{1+|B-b|}$?

б) Обобщите пункт а) на случай большего количества задуманных чисел.

в) Придумайте условия на выражения, при которых за два хода можно угадать задуманные положительные (или натуральные, или какие-либо ещё) числа A и B. (То есть, существует ли что-то аналогичное $|A - a| + |B - b|$).

IV. Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.

№ 8. Алгоритмы появились раньше слова «Алгоритм»

Для нахождения наибольшего общего делителя (НОД) двух натуральных чисел можно воспользоваться алгоритмом Евклида. Обозначим через a и b наибольшее и наименьшее из двух чисел соответственно. Шаг 1: поделим с остатком число a на b и обозначим остаток от деления через r. Если $r = 0$, то число b является НОД, если $r \neq 0$, то полагаем теперь, что a равно b, а b равно r, и возвращаемся к шагу 1.

1. Используя алгоритм Евклида, найдите НОД (207004667, 206800621).

2. Найдите НОД ($\underbrace{11 \dots 11}_{2024}$ и $\underbrace{11 \dots 11}_{1984}$).

3. Последовательность чисел Фибоначчи — это последовательность чисел в которой первое и второе число равны 1, а начиная с третьего, каждое следующее число получается из суммы двух предыдущих чисел. Последовательность чисел Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, …

3.1. Сколько операций деления понадобиться, чтобы найти НОД 2024-го и 2023-го числа Фибоначчи?

3.2. Сколько операций деления понадобиться, чтобы найти НОД 2024-го и 1984-го числа Фибоначчи?

3.3. Сколько операций деления понадобиться, чтобы найти НОД n-го и m-го числа Фибоначчи?

4. Опишите все пары чисел, для которых НОД алгоритмом Евклида найдется ровно за 3 операции деления. Опишите все пары чисел, для которых НОД алгоритмом Евклида найдётся за k операций деления.

5.1. Правда ли, что при нахождении НОД алгоритмом Евклида число операций деления двух произвольных натуральных не более чем двузначных чисел не превосходит количество операций деления при поиске НОД алгоритмом Евклида для 11-го и 10-го чисел Фибоначчи? Если ответ отрицательный, то тот же вопрос, но для 12-го и 11-го чисел Фибоначчи.

5.2. Пусть есть u-значное число и v-значное число. Какое наибольшее количество операций деления в алгоритме Евклида потребуется, чтобы найти НОД этих чисел?

6. Предложите свои обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их

№ 9. Разные «средние»

1. В магазин завезли 20 кг сыра, за ним выстроилась очередь. Отпустив сыр очередному покупателю, продавщица безошибочно подсчитывает средний вес покупки по всему проданному сыру и сообщает, на сколько человек хватит оставшегося сыра, если все будут покупать именно по этому среднему весу. Могла ли продавщица после каждого из первых 10 покупателей сообщать, что сыра хватит еще ровно на 10 человек? Если да, то сколько сыра осталось в магазине после первых 10 покупателей? (Средний вес покупки − это общий вес проданного сыра, деленный на число купивших.)

   1.1. Тот же вопрос для случая, когда сыра 100 кг, а продавщица сообщает, что сыра хватит ровно на M человек после каждого из первых K покупателей. Определите, для каких пар натуральных чисел (K, M) такое возможно.

1.2. Тот же вопрос, что и в пункте 1.1, с одним дополнительным условием: с того момента, когда сыра остается менее 10% от первоначально завезенного в магазин, норма отпуска сыра на каждого покупателя уменьшается вдвое, т.е. после этого момента каждый покупатель может взять половину сыра от среднего количества сыра, взятого всеми покупателями, рассчитанного до него.

2. Автобус, едущий по маршруту длиной 100 км, снабжен компьютером, показывающим прогноз времени, остающегося до прибытия в конечный пункт. Это время рассчитывается исходя из предположения, что средняя скорость автобуса на оставшемся участке маршрута будет такой же, как и на уже пройденной его части. Спустя 40 минут после начала движения ожидаемое время до прибытия составляло 1 час и оставалось таким же еще в течение пяти часов. Могло ли такое быть? Если да, то сколько километров проехал автобус к окончанию этих пяти часов? (Средняя скорость автобуса на участке маршрута − это длина участка, деленная на время, за которое этот участок пройден.).

2.1. Исследуйте вопросы этого пункта в случае, когда начальный расчет ожидаемого времени (1 час) до прибытия сделан не через 40 мин., а через K минут, и сохранялся таким еще в течение L часов.

3. При подведении итогов учебного года выяснилось, что в любой группе из не менее чем $k = 5$ учеников $m = 80$ процентов десяток, полученных этими учениками в течение года, поставлены не более чем $p = 20$ процентам учеников из этой группы. Докажите, что по крайней мере три четверти всех десяток получил один ученик.

3.1. Исследуйте вопрос пункта 3 для других значений k, m и p.

4. Рассмотрите другие обобщения или направления исследования в этой задаче и изучите их.

№ 10. Циферки

Во всех пунктах задачи надо будет придумать натуральное число, десятичная запись которого содержит каждую цифру от 0 до 9 одно и то же число раз (то есть количество 0 в десятичной записи числа равно количеству 1, равно количеству 2, и т. д.).

1. Запишите наименьшее такое число, кратное 10.

2. Запишите наименьшее число, кратное 7.

3. Запишите число, кратное 2024. Сможете ли вы записать наименьшее число кратное 2024?

4. Для любого простого p укажите алгоритм, как записать число кратное p. Придумайте алгоритм, как записать наименьшее число кратное p.

5. Исследуйте задачи пункта 4 для произвольного натурального числа N.

6. Предложите свои обобщения или направления исследований в этой задаче и изучите их. (Одним из обобщений может быть исследование такой задачи в других

системах счисления. Другим направлением может быть описание множества всех чисел, удовлетворяющих каким-то пунктам этой задачи. *Может Вы предложите другие – более интересные обобщения*.)