Riad KHARROUBI

I. Montrer que pour $n \in N^*$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

II. Pour une application $f: A \longrightarrow B$, donner la définition avec les quantificateurs l'injectivité, de la surjectivité et de la bijectivité de f.

III. On considère la fonction f définie par

$$f: [-\frac{1}{2}; +\infty[\longrightarrow [-\frac{1}{4}; +\infty[\ x \longmapsto x^2 + x$$

Montrer que la fonction f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Alexandre QUINTANA VOROBEY

I. Calculer pour $n \in N$

$$\sum_{k=0}^{n} k(n\ k\ )$$

II. Si E est un ensemble et A et B sont des parties de E, définir à l'aide de la notation $\{x \in ...|...\}$ les parties $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$ et $\overline{A}$.

III. Soit f l'application de R^2 dans R^2 définie par

$$\forall (a, b) \in R^2, f(a; b) = (a + b; a - b)$$

Montrer que f bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Valentin VERMOREL

I. Calculer pour $n \in N$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2^k}{3^{k+1}}\right)$$

II. Donner les formules permettant de calculer les sommes de référence, sans oublier le cas des suites géométriques et arithmétiques.

III. Soient deux applications $f: E \longrightarrow F$ et $g: F \longrightarrow G$

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Riad KHARROUBI

I. Montrer que pour $n \in N^*$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

II. Pour une application $f: A \longrightarrow B$, donner la définition avec les quantificateurs l'injectivité, de la surjectivité et de la bijectivité de f.

III. On considère la fonction f définie par

$$f: [-\frac{1}{2}; +\infty[\longrightarrow [-\frac{1}{4}; +\infty[\ x \longmapsto x^2 + x$$

Montrer que la fonction f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Alexandre QUINTANA VOROBEY

I. Calculer pour $n \in N$

$$\sum_{k=0}^{n} k(n\ k\ )$$

II. Si E est un ensemble et A et B sont des parties de E, définir à l'aide de la notation $\{x \in ...|...\}$ les parties $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$ et $\overline{A}$.

III. Soit f l'application de R^2 dans R^2 définie par

$$\forall (a, b) \in R^2, f(a; b) = (a + b; a - b)$$

Montrer que f bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Valentin VERMOREL

I. Calculer pour $n \in N$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2^k}{3^{k+1}}\right)$$

II. Donner les formules permettant de calculer les sommes de référence, sans oublier le cas des suites géométriques et arithmétiques.

III. Soient deux applications $f: E \longrightarrow F$ et $g: F \longrightarrow G$

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Riad KHARROUBI

I. Montrer que pour $n \in N^*$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Soit $n \in N^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

II. Pour une application $f: A \longrightarrow B$, donner la définition avec les quantificateurs l'injectivité, de la surjectivité et de la bijectivité de f.

III. On considère la fonction f définie par

$$f: [-\frac{1}{2}; +\infty[\longrightarrow [-\frac{1}{4}; +\infty[\ x \longmapsto x^2 + x$$

Montrer que la fonction f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Montrons que la fonction f est bijective.

Injectivité

Soient $x, y \in [-\frac{1}{2}; +\infty[$,

$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x^2 + x = y^2 + y \Leftrightarrow x^2 - y^2 + x - y = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) + x -$

Donc f est injective

Surjectivité

Soit $c \in [-\frac{1}{4}; +\infty[$,

$$f(x) = c \Leftrightarrow x^2 + x = c \Leftrightarrow x^2 + x - c = 0$$

Cette équation admet au moins une solution réelle si

$$\Delta = 1 + 4c \geq 0$$

Or,

$$c \geq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow 4c \geq -1 \Leftrightarrow 1 + 4c \geq 0$$

Ainsi

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \in [-\frac{1}{2}; +\infty[$$

est bien un antécédent de c par f. On en déduit que f est surjective et donc bijective.

Soit $x \in [-\frac{1}{2}; +\infty[$,

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 + x = y \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = y \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = y + \frac{1}{4}\ (1)$$

En remarquant que, par hypothèse,

$$x + \frac{1}{2} \geq 0$$

$$(1) \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = \sqrt{y + \frac{1}{4}} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} + \sqrt{y + \frac{1}{4}}$$

On en déduit que

$$\forall x \in [-\frac{1}{4}; +\infty[, f^{-1}(x) = -\frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}$$

Remarque

Pour montrer que la fonction f est bijective, on peut aussi remarquer que la fonction f est strictement croissante sur $[-\frac{1}{2}; +\infty[$ et

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$f(x) = +\infty$$

Alexandre QUINTANA VOROBEY

I. Calculer pour $n \in N$

$$\sum_{k=0}^{n} k(n\ k)$$

Soit $n \in N$,

$$\sum_{k=0}^{n} k(n\ k) = \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n \sum_{k=1}^{n} (n-1\ k-1) = n \sum_{k=0}^{n-1} (n$$

II. Si E est un ensemble et A et B sont des parties de E, définir à l'aide de la notation $\{x \in ...|...\}$ les parties $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$ et $\overline{A}$.

III. Soit f l'application de R^2 dans R^2 définie par

$$\forall(a, b) \in R^2, f(a; b) = (a + b; a - b)$$

Montrer que f bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Montrons que la fonction f est bijective.

Injectivité

Soient $a, b, a', b' \in R$,

$f(a; b) = f(a'; b') \Leftrightarrow (a + b; a - b) = (a' + b'; a' - b') \Leftrightarrow \{a + b = a' + b' \; a - b$

Donc f est injective

Surjectivité

Soient $x, y, a, b \in R$,

$f(a; b) = (x; y) \Leftrightarrow \{a + b = x \; a - b = y \Leftrightarrow \{2b = x - y \; 2a = x + y \Leftrightarrow \{b = \frac{x}{}$

Donc $\left(\frac{x+y}{2}; \frac{x-y}{2}\right)$ est un antécédent de $(x; y)$ par f donc f est surjective et donc bijective et

$$\forall(x; y) \in R^2, f^{-1}(x; y) = \left(\frac{x+y}{2}; \frac{x-y}{2}\right)$$

Remarque

Du fait de l'unicité de l'antécédent trouvé, la démonstration de la surjectivité était en fait celle de la bijectivité.

Valentin VERMOREL

I. Calculer pour $n \in N$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2^k}{3^{k+1}}\right)$$

Soit $n \in N$,

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2^k}{3^{k+1}}\right) = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

II. Donner les formules permettant de calculer les sommes de référence, sans oublier le cas des suites géométriques et arithmétiques.

III. Soient deux applications $f: E \longrightarrow F$ et $g: F \longrightarrow G$

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

Supposons que $g \circ f$ est injective. Soient $x, y \in E$,

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow g \circ f(x) = g \circ f(y) \Longrightarrow x = y$$

Donc f est injective.

2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Supposons que $g \circ f$ est surjective. Soit $y \in G$, il existe $x \in E$ tel que

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = y$$

Or, $f(x) \in F$ est un antécédent de y par g donc g est surjective.