

15. Функции: обратная пропорциональность, арифметический корень

МАТЕРИАЛ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

ОБРАТНАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ

Если переменная y обратно пропорциональна переменной x , то эта зависимость выражается формулой

$$y = \frac{k}{x}, \quad k \neq 0$$

k - коэффициент обратной пропорциональности.

Например:

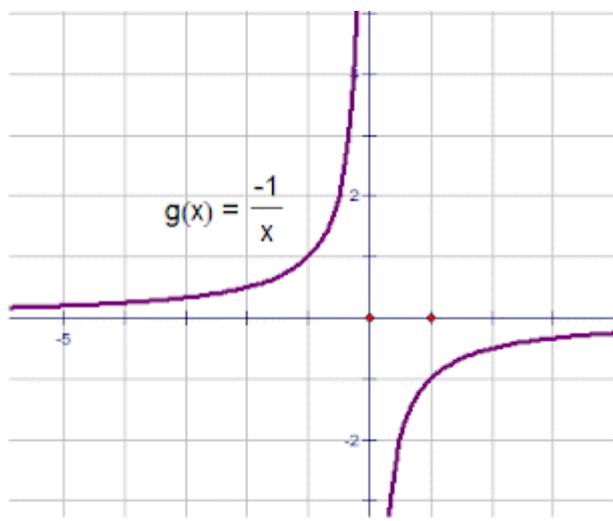
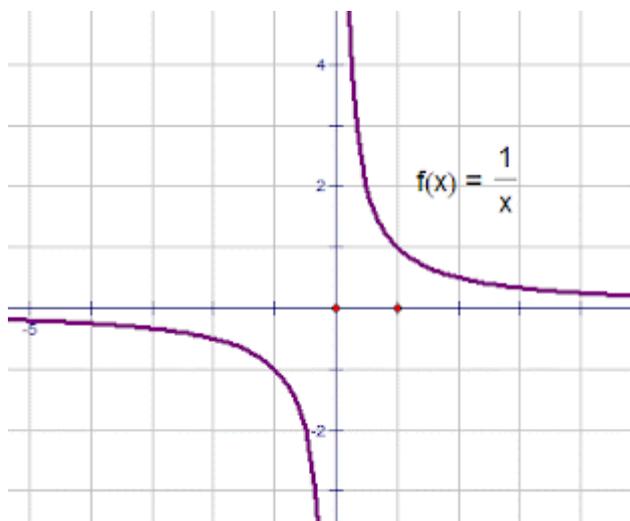
$$y = \frac{2}{x}; \quad y = -\frac{5}{x}$$

Область определения функции $y = \frac{k}{x}$ есть множество всех чисел, отличных от нуля.

Графиком обратной пропорциональности является **гипербола**. Если $k > 0$, то ветви гиперболы расположены в I и в III координатных четвертях: если $k < 0$, то ветви гиперболы расположены во II и в IV координатных четвертях.

График функции строится по точкам, для этого составляют таблицу значений функции:

x	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4
y	$k:(-4)$	$k:(-3)$	$k:(-2)$	$k:(-1)$	$k:1$	$k:2$	$k:3$	$k:4$



Свойства функции

1. Область определения: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
2. Множество значений: $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
3. Функция не имеет минимального и максимального значения.
4. Нули функции: функция не имеет нулей.
5. Промежутки знакопостоянства функции:
если $k > 0$: $y < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$;
 $y > 0$ при $x \in (0; +\infty)$;
если $k < 0$: $y < 0$ при $x \in (0; +\infty)$;
 $y > 0$ при $x \in (-\infty; 0)$.

6. Промежутки монотонности:

если $k > 0$ функция убывает на промежутке $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

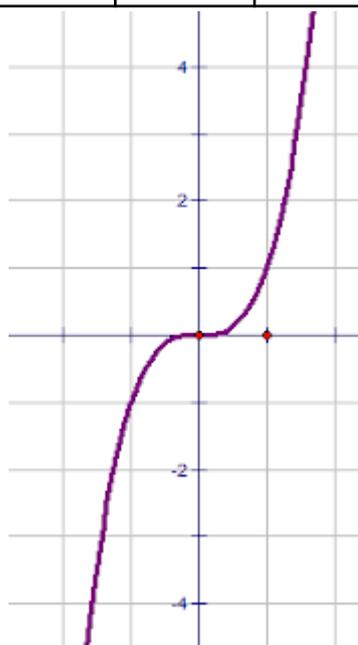
если $k < 0$ функция возрастает на промежутке $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

ФУНКЦИЯ $y=x^3$

Функцию вида $y=x^3$ называют кубической функцией. Графиком кубической функции является **кубическая парабола**, проходящая через начало координат. Ветви кубической параболы $y=x^3$ находятся в I и III четвертях.

График функции строится по точкам, для этого составляют таблицу значений функции:

x	-2,5	-2	-1,5	-1	1	1,5	2	2,5
y	-15,625	-8	-3,375	-1	1	3,375	8	15,625



Свойства функции

1. Область определения: $D(y)=(-\infty; +\infty)$.

2. Множество значений: $E(y)=(-\infty; +\infty)$.

3. Функция не имеет минимального и максимального значения.

4. Нули функции: $x=0$.

5. Промежутки знакопостоянства функции:

$y < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$;

$y > 0$ при $x \in (0; +\infty)$.

6. Промежутки монотонности:

функция возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

ФУНКЦИЯ КВАДРАТНОГО КОРНЯ

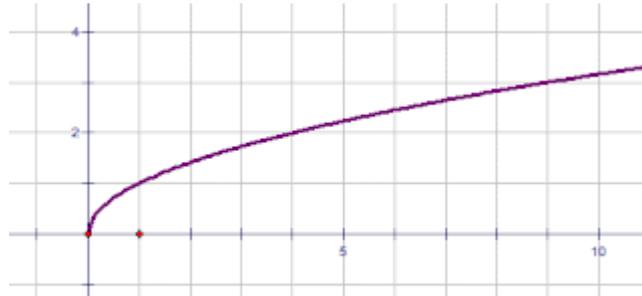
Функцией арифметического корня называют функцию, заданную формулой

$$y = \sqrt{x}$$

Т.к. выражение имеет смысл только при неотрицательных значениях x , то функция задается на промежутке $(0; +\infty)$.

График функции строится по точкам, для этого составляют таблицу значений функции:

x	0	4	9	16
y	0	2	3	4



Свойства функции

1. Область определения: $D(y)=[0; +\infty)$.
2. Множество значений: $E(y)=[0; +\infty)$.
3. Функция не имеет максимального значения; минимальное значение равно 0.
4. Нули функции: $x=0$.
5. Промежутки знакопостоянства функции:
 $y>0$ при $x \in(0; +\infty)$.
6. Промежутки монотонности:
функция возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Графиком каких из функций является гипербола?

а) 1) $y = \frac{x}{3}$; 2) $y = \sqrt{x}$; 3) $y = \frac{1}{x}$; 4) $y = 2x^3$; 5) $y = x^2$;

б) 1) $y = -\frac{x}{2}$; 2) $y = \frac{\sqrt{x}}{4}$; 3) $y = 3x^2$; 4) $y = 5x^2 - 2x$; 5) $y = \frac{-4}{x}$.

Решение:

а) График функции $y=k/x$ - гипербола, следовательно гипербола является графиком функции $y=1/x$.

Ответ: 3)

2. Из данных функций укажите те, график которых проходит через начало координат:

а) 1) $y = 5x$; 2) $y = \frac{3}{x}$; 3) $y = 2x^2$; 4) $y = \sqrt{5x}$; 5) $y = \frac{x}{2}$;

б) 1) $y = 3x^3$; 2) $y = \frac{-2}{x}$; 3) $y = \sqrt{x}$; 4) $y = -4x$; 5) $y = \frac{x+1}{5}$.

Решение:

а) Если график функции проходит через начало координат, то при $x=0$ $y=0$.
Следовательно графики функций

1) $y = 5x$; 3) $y = 2x^2$; 4) $y = \sqrt{5x}$; 5) $y = \frac{x}{2}$ проходят через начало координат.

Ответ: 1), 3), 4), 5).

3. а) График обратной пропорциональности проходит через точку с координатами (2; -2). Найдите коэффициент обратной пропорциональности.

б) График обратной пропорциональности проходит через точку с координатами (4; 1,75). Найдите коэффициент обратной пропорциональности.

Решение:

а) Формула обратной пропорциональности $y=k/x$. Подставим вместо x и y координаты точки (2; -2) и найдем коэффициент k .

$$-2=k:2; k=-4.$$

Ответ: -4.

4. Укажите функции, областью определения которых являются все действительные числа:

$$а) 1) y = 0,5x^2; \quad 2) y = \sqrt{x+1}; \quad 3) y = \frac{5}{x}; \quad 4) y = \frac{2x}{3x^2+1}; \quad y = \frac{5}{x^2-1};$$

$$б) 1) y = -\frac{2}{x}; \quad 2) y = \frac{x+6}{x^2+5}; \quad 3) y = 5-x^2; \quad 4) y = \sqrt{3x}; \quad y = \frac{x}{x^2-4};$$

Решение:

а) Область определения функции ограничена, если в формуле, которой задана функция есть квадратные корни и знаменатели, которые могут принимать значение 0 при некоторых значениях x . Область определения - все действительные числа у функций:

$$а) 1) y = 0,5x^2; \quad 4) y = \frac{2x}{3x^2+1}$$

Ответ: 1), 4).

5. Из указанных функций

$$1) y = -\frac{3}{x}; \quad 2) y = \frac{x}{3}; \quad 3) y = \frac{5}{x}; \quad 4) y = \frac{0,2}{x}; \quad 5) y = -\frac{x}{2}; \quad 6) y = \frac{-1,5}{x}$$

выберите обратную пропорциональность, график которой расположен:

а) в I и III координатных четвертях;

б) во II и IV координатных четвертях.

Решение:

а) в I и III координатных четвертях находятся графики обратной пропорциональности с коэффициентом $k>0$.

$$3) y = \frac{5}{x}; \quad 4) y = \frac{0,2}{x}$$

Ответ: 3), 4).

6. Переменные x и y обратно пропорциональны.

а) Известно, что при $x=0,5$ $y=12$. Найдите значение y при $x=-2$;

б) известно, что при $x=1,5$ $y=-6$. Найдите значение y при $x=2$.

Решение:

а) Составим формулу обратной пропорциональности, для этого в формулу $y=k/x$ подставим значения $x=0,5$ и $y=12$, найдем коэффициент k .

$$12=k:0,5; k=12*0,5=6. \text{ Обратная пропорциональность задана формулой } y=6/x.$$

Подставим в эту формулу $x=-2$: $y=6: (-2)=-3$.

Ответ: -3.

7. Найдите область определения функции:

$$а) y = \sqrt{(4x-1)(x+0,5)}; \quad б) y = 4\sqrt{(2x+8)(3-x)}$$

Решение:

а) Выражение под корнем $(4x-1)(x+0,5)$ должно быть неотрицательным. Решим неравенство:

$$(4x-1)(x+0,5) \geq 0,$$

Найдем нули функции $(4x-1)(x+0,5)=0$:

$$4x-1=0 \text{ или } x+0,5=0$$

$$x=0,25 \quad x=-0,5$$

Решим неравенство методом интервалов:



Ответ: $(-\infty; -0,5] \cup [0,25; +\infty)$.

8. а) Найдите значения аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения

$$y = -\frac{3}{\sqrt{16-x^2}}$$

б) Найдите значения аргумента, при которых функция принимает положительные значения

$$y = \frac{9}{\sqrt{8-x^2}}$$

Решение:

а) Рассмотрим неравенство

$$-\frac{3}{\sqrt{16-x^2}} < 0$$

Умножив обе части неравенства на (-1) получим:

$$\frac{3}{\sqrt{16-x^2}} > 0$$

Числитель равен 3 - положительное число, знаменатель тоже является положительным числом, следовательно дробь положительна на области определения. Найдем область определения функции:

$$16-x^2 > 0,$$

$$x^2 < 16,$$

$$|x| < 4.$$

Ответ: $(-4; 4)$.

9. График какой из функций симметричен относительно начала координат?

Постройте график выбранной функции:

а) 1) $y = x^2 + 1$; 2) $y = 0,5x^3$; 3) $y = \frac{x+3}{5}$; 4) $y = \sqrt{x+1}$;

б) 1) $y = 2x^2 - 5$; 2) $y = \frac{3}{x}$; 3) $y = \frac{3x-1}{4}$; 4) $y = -\sqrt{x-1}$.

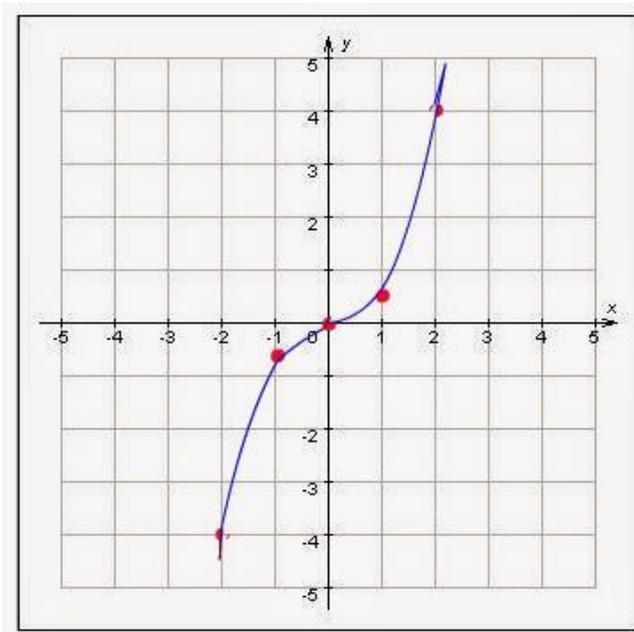
Решение:

а) Симметричен относительно начала координат график функции $y=0,5x^3$

Построим таблицу значений функции:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-13,5	-4	-0,5	0	0,5	4	13,5

Построим график:



10. Постройте график функции:

$$a) y = \frac{6}{x+1}; \quad б) y = \frac{4}{x-1}.$$

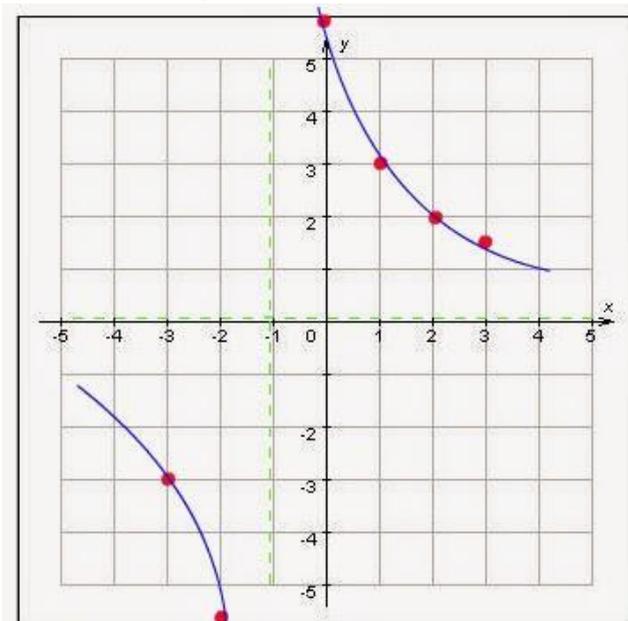
Решение:

$$a) y = \frac{6}{x+1}$$

Построим таблицу значений функции:

x	-3	-2	0	1	2	3
y	-3	-6	6	3	2	1,5

Построим график:



11. а) Построив графики функций $y=5-x$ и $y = \sqrt{x}$ Найдите количество корней уравнения

$$\sqrt{x} = 5 - x$$

б) Построив графики функций $y=-2-x$ и $y=x^3$ найдите количество корней уравнения $-x-2=x^3$

Решение:

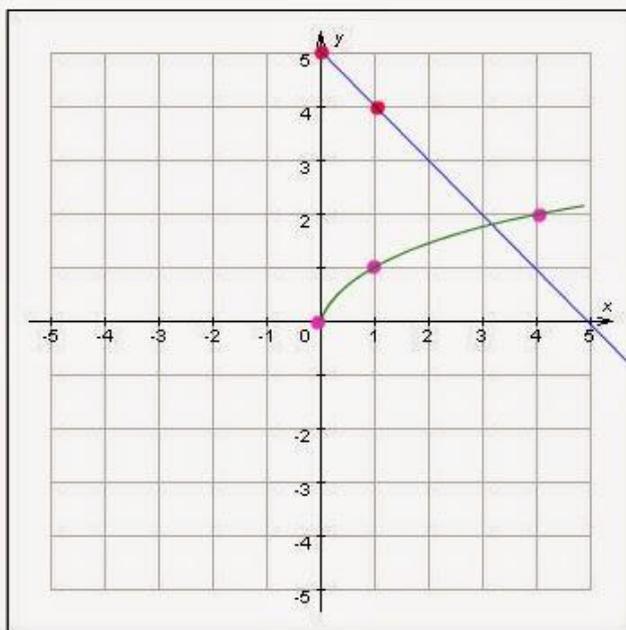
а) Графиком функции $y=5-x$ является прямая, для ее построения найдем координаты двух точек:

x	0	1
y	5	4

Таблица значений функции $y = \sqrt{x}$:

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

Построим оба этих графика в одной системе координат и найдем их точку пересечения:



12. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{x^2 - 16} - \sqrt{x - 4}$; б) $y = \sqrt{49 - x^2} + \sqrt{-x - 2}$

Решение:

а) Выражения под корнем должны быть неотрицательны. Решим систему неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 16 \geq 0, & \{ x^2 \geq 16, \{ |x| \geq 4 \\ x - 4 \geq 0; & \{ x \geq 4; \{ x \geq 4 \end{cases}$$

Ответ: $[4; +\infty)$.

13. Постройте графики функций и найдите точки пересечения графика с осями координат:

$$а) y = \frac{3}{x-1} + 5; \quad б) y = -\frac{2}{x+2} - 4.$$

Решение:

а) Графиком данной функции является гипербола. Построить можно выполнив сдвиг графика функции $y=3/x$ на 3 единицы вправо и на две единицы вверх.

Построим таблицу значений функции:

x	-4	-3	-2	-1	0	2	3	4
y	4,4	4,25	4	3,5	2	8	6,5	6

Построим график:

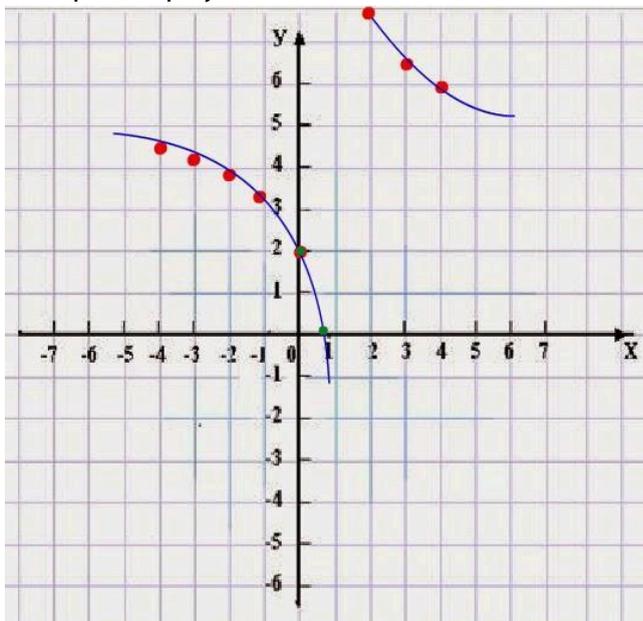


График с осями координат имеет две точки пересечения.

14. а) Докажите, что данная функция убывает на промежутке $(3; +\infty)$;

б) Докажите, что данная функция возрастает на промежутке $(-\infty; 3)$:

$$а) y = \frac{3}{x-3} + 2; \quad б) y = -\frac{4}{x+2} - 3.$$

Решение:

а) Найдем область определения функции

$$а) y = \frac{3}{x-3} + 2$$

$$D = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty).$$

Рассмотрим x_1 и x_2 , принадлежащие промежутку $(3; +\infty)$ такие, что $x_1 > x_2$.

Тогда

$$y_1 = \frac{3}{x_1-3} + 2 \quad \text{и} \quad y_2 = \frac{3}{x_2-3} + 2$$

Найдем разность $y_1 - y_2$:

$$y_1 - y_2 = \frac{3}{x_1-3} + 2 - \frac{3}{x_2-3} - 2 = \frac{3x_2 - 9 - 3x_1 + 9}{(x_1-3)(x_2-3)} = \frac{3(x_2 - x_1)}{(x_1-3)(x_2-3)}$$

Т.к. $x_1 > x_2$, то числитель будет отрицательным числом. (x_1-3) и (x_2-3) на промежутке $(3; +\infty)$ будут положительными числами, следовательно $y_1 - y_2 < 0$.

Т.к. $x_1 > x_2$ и $y_1 - y_2 < 0$, то функция убывает на промежутке $(3; +\infty)$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. В каких координатных четвертях расположен график функции, заданный формулой:
а) $y = -0,9/x$; б) $y = 1,4/x$?

2. Из числовых промежутков $(-\infty; 5]$, $(0; +\infty)$, $(5; +\infty)$ и $[5; +\infty)$ выберите тот, который является областью определения функции

$$y = \sqrt{x - 5}$$

3. Какой из графиков функций, заданных формулами не проходит через начало координат

$$1) y = x - 2; \quad 2) y = -\frac{5}{x}; \quad 3) y = x^{-1}$$

4. Найдите область определения функции, заданной формулой:

$$а) y = \sqrt{4 - x}; \quad б) y = \frac{7}{3x + 7}$$

5. Постройте график функции, заданной формулой:

$$y = -\frac{8}{x}$$

6. а) График обратной пропорциональности проходит через точку $A(8; 4)$. Найдите значение этой функции при $x = -10$.

б) График обратной пропорциональности проходит через точку $A(-16; 2)$. Найдите значение этой функции при $x = 5$.

7. Найдите точки пересечения с осью Oy графика функции, заданного формулой:

$$а) y = 1 - \frac{3}{2 + 3x}; \quad б) y = 2 - \frac{2}{3x - 4}$$

8. Постройте график функции и укажите нули функции, если они существуют:

$$y = \frac{5}{x - 2} - 4$$

9. Докажите, что при $x \geq 1$ функция возрастает

$$y = x + \frac{1}{x}$$

10. Найдите область определения функции:

$$y = \frac{\sqrt{x + 0,25} - 5}{x - 0,2} - \sqrt{\frac{x}{2} - \frac{1}{16} - x^2}$$