

Première partie

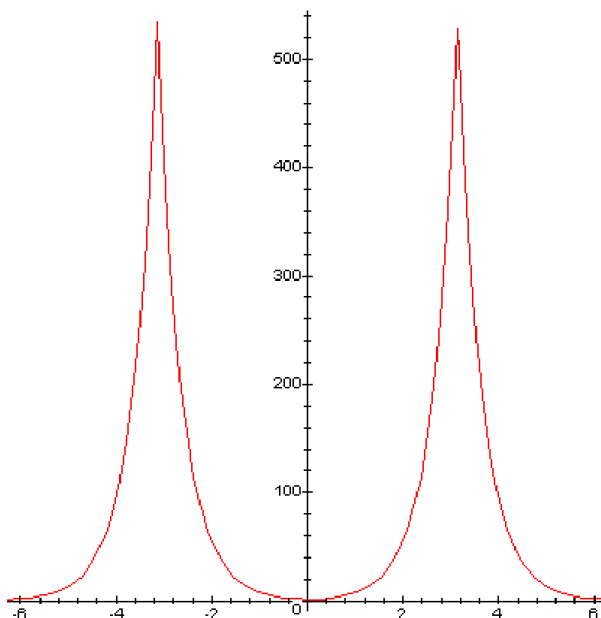
Soit $a > 0$ et f_a la fonction 2π -périodique valant $e^{a|t|}$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi[$.

1. Pour cette question, on prend $a = 2$.

a. Tracé du graphe de f_2 sur $[-2\pi, 2\pi[$.

Compte tenu de la période et de la définition de f_a sur $[-\pi, \pi[$, on peut dire que f_a est une fonction paire, continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

On déduit le tracé du graphe sur $[-2\pi, 2\pi[$ de celui sur $[0, \pi[$, en effectuant une symétrie par rapport à Oy, puis la translation de vecteur $-2\pi i$ de la portion du graphe correspondant à $[0, \pi[$,
et
enfin la translation de vecteur $2\pi i$ de la portion du graphe correspondant à $[-\pi, 0[$.



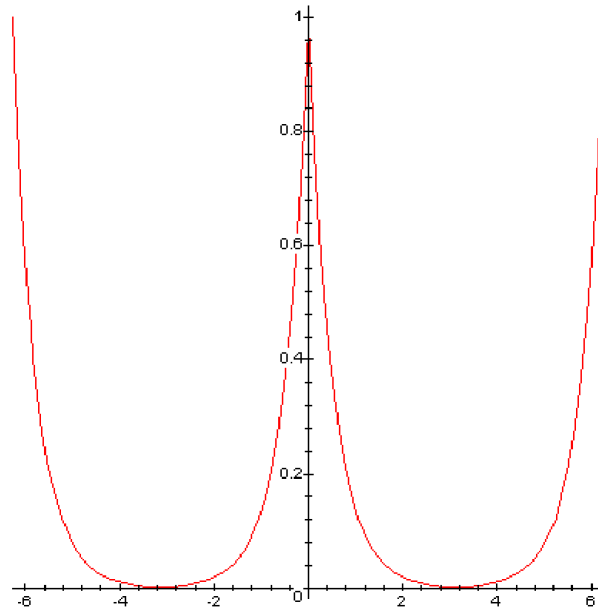
```
> restart;
> f:=proc(x)
  local rep;
  if x<=evalf(Pi) then rep:=exp(2*(x+2*Pi));
  elif x<=evalf(Pi) then rep:=exp(2*abs(x))
  else rep:=exp(-2*(x-2*Pi));
```

```

fi;rep;
end;
> plot(f,-2*Pi..2*Pi);    (Attention, la courbe passe par le point (0,1) et non pas (0,0), effet d'échelle!)

```

b. Mêmes remarques pour le graphe de f_{-2}



Attention, là aussi on a l'impression que la courbe passe par le point $(\pi, 0)$ avec une tangente horizontale, ce n'est pas le cas, il s'agit du point $(\pi, e^{-2\pi})$ et c'est un point anguleux.

2. Coefficients de Fourier d'une fonction T -périodique, définie sur $\mathbb{R}$, continue par morceaux.

On pose : $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et alors on a :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt$$

pour les coefficients de Fourier réels.

Notons bien qu'avec cette définition, le premier terme de la série de Fourier de f est $\frac{a_0}{2}$.

Une deuxième convention consiste à prendre $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$. C'est celle-ci qui fait que la formule demandée dans la troisième partie, question 5 est juste. Ces deux conventions ont leurs avantages et leurs inconvénients...

L'écriture de ces coefficients de Fourier peut être modifiée pour tenir compte de l'éventuelle parité de f .

Exemple, si f est paire,

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad \text{et} \quad b_n = 0$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ni\omega t} dt$$

coefficients de Fourier complexes de f .

3. a. Calcul de $\int_{-\pi}^{\pi} f_a(t) dt$ et $\int_{-\pi}^{\pi} f_{-a}(t) dt$.

On a : $\int_{-\pi}^{\pi} f_a(t) dt = 2 \int_0^{\pi} f_a(t) dt = 2 \int_0^{\pi} e^{at} dt = \frac{2}{a} (e^{a\pi} - 1)$

De même, $\int_{-\pi}^{\pi} f_{-a}(t) dt = 2 \int_0^{\pi} f_{-a}(t) dt = 2 \int_0^{\pi} e^{-at} dt = -\frac{2}{a} (e^{-a\pi} - 1)$

Conclusion : $\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} f_a(t) dt = \frac{2}{a} (e^{a\pi} - 1) \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{\pi} f_{-a}(t) dt = -\frac{2}{a} (e^{-a\pi} - 1)}$

b. Calcul de $\int_0^{\pi} e^{at} \cos(nt) dt$.

Une première intégration par parties donne :
$$\begin{cases} u = \cos(nt) , & u' = -n \sin(nt) \\ v' = e^{at} , & v = \frac{1}{a} e^{at} \end{cases} \quad \text{d'où :}$$

$$\int_0^{\pi} e^{at} \cos(nt) dt = \left[\frac{1}{a} e^{at} \cos(nt) \right]_0^{\pi} + \frac{n}{a} \int_0^{\pi} e^{at} \sin(nt) dt = \frac{1}{a} [(-1)^n e^{a\pi} - 1] + \frac{n}{a} \int_0^{\pi} e^{at} \sin(nt) dt$$

Une deuxième intégration par parties donne :
$$\begin{cases} u = \sin(nt) , & u' = n \cos(nt) \\ v' = e^{at} , & v = \frac{1}{a} e^{at} \end{cases} \quad \text{de sorte que :}$$

$$\int_0^{\pi} e^{at} \sin(nt) dt = \left[\frac{1}{a} e^{at} \sin(nt) \right]_0^{\pi} - \frac{n}{a} \int_0^{\pi} e^{at} \cos(nt) dt = -\frac{n}{a} \int_0^{\pi} e^{at} \cos(nt) dt$$

Et finalement :
$$\boxed{\int_0^{\pi} e^{at} \cos(nt) dt = \frac{1}{a} [(-1)^n e^{a\pi} - 1] - \frac{n^2}{a^2} \int_0^{\pi} e^{at} \cos(nt) dt}$$

c. Calculs des coefficients de Fourier de f_a .

D'après 3.(a), $\int_{-\pi}^{\pi} f_a(t) dt = \frac{2}{a} (e^{a\pi} - 1)$ et donc $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_a(t) dt = \frac{2}{a\pi} (e^{a\pi} - 1)$ avec la première

convention et $a_0 = \frac{1}{a\pi} (e^{a\pi} - 1)$ avec la deuxième convention.

D'après 3.(b),

$$\left(1 + \frac{n^2}{a^2}\right) \int_0^{\pi} e^{at} \cos(nt) dt = \frac{1}{a} [(-1)^n e^{a\pi} - 1] \quad \text{donc} \quad \int_0^{\pi} e^{at} \cos(nt) dt = \frac{a}{a^2 + n^2} [(-1)^n e^{a\pi} - 1]$$

, et par

suite :
$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^{at} \cos(nt) dt = \frac{2a}{\pi(a^2 + n^2)} [(-1)^n e^{a\pi} - 1]$$

Conclusion :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{a\pi} (e^{a\pi} - 1) \quad \text{ou bien} \quad a_0 = \frac{1}{a\pi} (e^{a\pi} - 1) \quad \text{au choix... et} \\ a_n &= \frac{2a}{\pi(a^2 + n^2)} [(-1)^n e^{a\pi} - 1] \quad \text{pour } n \geq 1 \quad b_n = 0 \quad (\text{parité}) \end{aligned}$$

On constate que la formule générale reste valable pour $n = 0$ avec la première convention mais pas avec la deuxième...

d. Calculs des coefficients de Fourier de f_{-a} .

Dans les calculs précédents, le fait que a soit strictement positif n'intervenait que pour dire $a \neq 0$, et donc il suffit dans les formules précédentes de remplacer a par $-a$ pour obtenir les coefficients de Fourier de f_{-a} .

Conclusion :

$$\begin{aligned} \text{Pour } f_{-a} \text{ on a : } a_0 &= -\frac{2}{a\pi} (e^{-a\pi} - 1) \quad \text{ou bien} \quad a_0 = -\frac{1}{a\pi} (e^{-a\pi} - 1) \quad \text{et} \\ a_n &= -\frac{2a}{\pi(a^2 + n^2)} [(-1)^n e^{-a\pi} - 1] \quad \text{pour } n \geq 1 \quad b_n = 0 \quad (\text{parité}) \end{aligned}$$

4. a. Une fonction f est dite de classe C^1 par morceaux sur un intervalle $[a, b]$ par exemple, si il existe une subdivision de $[a, b]$, $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$ telle que les restrictions de f aux intervalles $]t_i, t_{i+1}[$ se prolongent en des fonctions de classe C^1 sur $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0 \dots n-1$.

La fonction f sera dite de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, si elle est de classe C^1 par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Attention, notons bien qu'une fonction de classe C^1 par morceaux peut fort bien être discontinue aux points t_i .

Les fonctions f_a et f_{-a} sont de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. (Points anguleux en $t_k = k\pi$)

Les fonctions f_a et f_{-a} sont continues sur $[-\pi, \pi[$ et même sur $\mathbb{R}$.

b. Les fonctions f_a et f_{-a} étant de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, elles vérifient les hypothèses de du théorème de Dirichlet - Jordan, leurs séries de Fourier respectives convergent en tout point t de $\mathbb{R}$ et ont pour sommes, puisque f_a et f_{-a} sont continues, $f_a(t)$ et $f_{-a}(t)$.

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \quad \begin{cases} e^{a|t|} = \frac{e^{a\pi} - 1}{\pi a} + \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{a\pi} - 1}{(a^2 + n^2)} \cos(nt) \\ e^{-a|t|} = -\frac{e^{-a\pi} - 1}{\pi a} - \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-a\pi} - 1}{(a^2 + n^2)} \cos(nt) \end{cases}$$

Par suite, on peut écrire :

Et on en déduit, en faisant la somme des deux expressions :

$$f_a(t) + f_{-a}(t) = \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{a\pi} + \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (e^{a\pi} - e^{-a\pi})}{a^2 + n^2} \cos(nt) \quad \text{soit :}$$

$$\boxed{f_a(t) + f_{-a}(t) = e^{a|t|} + e^{-a|t|} = \frac{2sh(a\pi)}{a\pi} + \frac{4a}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n sh(a\pi)}{a^2 + n^2} \cos(nt)} \quad \text{Cqfd.}$$

5. Calculs de :

a. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2}$. On fait $t = 0$ dans la formule précédente. On obtient :

$$f_a(0) + f_{-a}(0) = 2 = \frac{2sh(a\pi)}{a\pi} + \frac{4a}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n sh(a\pi)}{a^2 + n^2} \quad \text{soit} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2} = \left[\frac{2}{sh(a\pi)} - \frac{2}{a\pi} \right] \frac{\pi}{4a}$$

Conclusion : $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2} = \frac{\pi}{2a} \left[\frac{1}{sh(a\pi)} - \frac{1}{a\pi} \right]}$

b. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$. On fait $t = -\pi$ dans la formule précédente. On obtient :

$$f_a(-\pi) + f_{-a}(-\pi) = e^{a\pi} + e^{-a\pi} = \frac{2sh(a\pi)}{a\pi} + \frac{4a}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sh(a\pi)}{a^2 + n^2} \quad \text{soit} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + n^2} = \left[\frac{2ch(a\pi)}{sh(a\pi)} - \frac{2}{a\pi} \right] \frac{\pi}{4a}$$

Conclusion : $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + n^2} = \frac{\pi}{2a} \left[\frac{ch(a\pi)}{sh(a\pi)} - \frac{1}{a\pi} \right]}$

Deuxième partie

Soit l'application ψ , définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{cht} dt$

Rq : On nous affirme que cette application est bien définie sur $\mathbb{R}$, mais il me semble que la première chose à faire aurait dû être la justification de ce résultat.

Pour cela : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{\cos(xt)}{cht}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc localement intégrable sur cet intervalle. Le seul problème d'intégrale généralisée est donc en $+\infty$.

Or, au voisinage de $+\infty$, $\frac{\cos(xt)}{cht}$ n'est pas de signe constant, mais,

$\left| \frac{\cos(xt)}{cht} \right| \leq \frac{1}{cht}$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \frac{1}{cht} = 0$ ce qui assure que $\frac{1}{cht} < \frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$, et par suite

que

l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{cht} dt$ est convergente. Dès lors l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{cht} dt$ est absolument convergente, donc convergente.

1. a. Soit g définie sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ par $g(x, t) = \frac{\cos(xt)}{cht}$.

Cette fonction est bien continue sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ comme produit des deux fonctions continues :

$$(x, t) \mapsto \frac{1}{cht} \quad \text{et} \quad (x, t) \mapsto \cos(xt)$$

On a vu dans la remarque que :

$$\left| \frac{\cos(xt)}{cht} \right| \leq \frac{1}{cht} \quad \text{or} \quad ch(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} > \frac{e^t}{2} \quad \text{ce qui assure que} \quad \frac{1}{cht} < \frac{2}{e^t}$$

b. Théorème de continuité pour ψ .

- $\forall t \in [0, +\infty[$, $x \mapsto \frac{\cos(xt)}{cht}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\cos(xt)}{cht}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$, $\left| \frac{\cos(xt)}{cht} \right| \leq \frac{2}{e^t}$ fonction indépendante de x , continue sur $[0, +\infty[$ et telle

que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{2}{e^t} dt = 2$ est convergente.

Conclusion : ψ est continue sur $\mathbb{R}$.

2. a. Ça commence très mal, puisque le premier membre de la formule n'a pas de sens pour $X = -1$!

$$\forall X \neq -1, \quad \forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{1+X} = \sum_{k=0}^N (-1)^k X^k + \frac{(-1)^{N+1} X^{N+1}}{1+X}$$

Alors en fait on a : qui n'est autre que la formule donnant la somme des premiers termes de la suite géométrique de raison $-X$.

En effet : $\sum_{k=0}^N (-X)^k = \frac{1 - (-1)^{N+1} X^{N+1}}{1 - (-X)}$ ce qui donne la formule demandée.

Ou bien fallait-il faire le calcul développé de $(1+X)(1-X+X^2+\dots+(-1)^N X^N) = 1 + (-1)^N X^{N+1}$.

Conclusion :

$$\forall X \neq -1, \quad \forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{1+X} = \sum_{k=0}^N (-1)^k X^k + \frac{(-1)^{N+1} X^{N+1}}{1+X}$$

b. Dans la formule précédente, faisons $X = e^{-2t}$. On obtient :

$$\frac{1}{1+e^{-2t}} = \sum_{k=0}^N (-1)^k e^{-2kt} + \frac{(-1)^{N+1} e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}} \quad \text{soit encore}$$

$$\frac{1}{2e^{-t} \frac{e^t + e^{-t}}{2}} = \sum_{k=0}^N (-1)^k e^{-2kt} + \frac{(-1)^{N+1} e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}}$$

$$\frac{1}{\cosh t} = 2e^{-t} \left[\sum_{k=0}^N (-1)^k e^{-2kt} + \frac{(-1)^{N+1} e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}} \right]$$

et finalement on peut écrire :

c. On déduit de l'égalité précédente l'écriture suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \psi(x) = \int_0^{+\infty} 2e^{-t} \left[\sum_{k=0}^N (-1)^k e^{-2kt} + \frac{(-1)^{N+1} e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}} \right] \cos(xt) dt$$

Soit aussi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \psi(x) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(xt) \left[\sum_{k=0}^N (-1)^k e^{-2kt} + \frac{(-1)^{N+1} e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}} \right] dt$$

$$\text{On pose } R_N(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(xt) \frac{(-1)^{N+1} e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}} dt$$

3. a. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ par : $h(x, t) = \frac{e^{-t} \cos(xt)}{1+e^{-2t}}$

On a : $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[, \quad |h(x, t)| \leq \frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}} < e^{-t} \leq 1$, donc h est bien bornée sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$.

b. On déduit de ce qui précède que :

$$|R_N(x)| \leq \int_0^{+\infty} \left| e^{-t} \cos(xt) \frac{(-1)^{N+1} e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}} \right| dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-2(N+1)t} dt = \frac{1}{2(N+1)}$$

$$\text{Par suite, } \lim_{N \rightarrow +\infty} R_N(x) = 0$$

4. Calcul de $J_k(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(xt) e^{-2kt} dt$

Cette intégrale est bien sûr convergente, car absolument convergente.

$$\text{En effet } |e^{-t} \cos(xt) e^{-2kt}| \leq e^{-(2k+1)t} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t} dt = \frac{1}{2k+1}$$

Une première intégration par parties donne :
$$\begin{cases} u = \cos(xt) & u' = -x \sin(xt) \\ v' = e^{-(2k+1)t} & v = -\frac{1}{2k+1} e^{-(2k+1)t} \end{cases} \quad \text{d'où}$$

$$J_k(x) = \left[-\frac{\cos(xt) e^{-(2k+1)t}}{2k+1} \right]_0^{+\infty} - \frac{x}{2k+1} \int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-(2k+1)t} dt = \frac{1}{2k+1} - \frac{x}{2k+1} \int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-(2k+1)t} dt$$

Une deuxième intégration par parties donne :
$$\begin{cases} u = \sin(xt) & u' = x \cos(xt) \\ v' = e^{-(2k+1)t} & v = -\frac{1}{2k+1} e^{-(2k+1)t} \end{cases} \quad \text{d'où}$$

$$J_k(x) = \frac{1}{2k+1} - \frac{x}{2k+1} \left[\left[-\frac{\sin(xt) e^{-(2k+1)t}}{2k+1} \right]_0^{+\infty} + \frac{x}{2k+1} \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-(2k+1)t} dt \right] \quad \text{c'est à dire :}$$

$$J_k(x) = \frac{1}{2k+1} - \frac{x^2}{(2k+1)^2} J_k(x) \quad \text{ce qui fournit : } J_k(x) \left[1 + \frac{x^2}{(2k+1)^2} \right] = \frac{1}{2k+1}$$

Conclusion :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \{0, \dots, N\}, \quad J_k(x) = \frac{2k+1}{x^2 + (2k+1)^2}$$

5. D'après les questions 2.,3.,4., on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \psi(x) = 2 \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{2k+1}{x^2 + (2k+1)^2} + 2R_N(x) \quad \text{et comme } \lim_{N \rightarrow +\infty} R_N(x) = 0, \quad \text{on peut écrire :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} 2 \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{2k+1}{x^2 + (2k+1)^2} \quad \text{ce qui est la définition de } \psi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (4k+2)}{x^2 + (2k+1)^2}$$

Conclusion :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x), \quad \text{avec } u_k(x) = \frac{(-1)^k (4k+2)}{x^2 + (2k+1)^2}$$

Troisième partie

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction S_N définie sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ par : $S_N(t) = \frac{\sin(2N+1)t}{\sin t}$.

1. On a
$$\sum_{k=-N}^N e^{2ikt} = 1 + \sum_{k=1}^N e^{-2ikt} + \sum_{k=1}^N e^{2ikt} = 1 + e^{-2it} \frac{1 - e^{-2iNt}}{1 - e^{-2it}} + e^{2it} \frac{1 - e^{2iNt}}{1 - e^{2it}} = 1 + e^{-it} \frac{1 - e^{-2iNt}}{e^{it} - e^{-it}} + e^{it} \frac{1 - e^{2iNt}}{e^{-it} - e^{it}}$$

soit :
$$\sum_{k=-N}^N e^{2ikt} = 1 + \frac{e^{-it} - e^{it}}{e^{it} - e^{-it}} + \frac{e^{(2N+1)it} - e^{-(2N+1)it}}{e^{it} - e^{-it}} = 1 - 1 + \frac{2i \sin(2N+1)t}{2i \sin t} = \frac{\sin(2N+1)t}{\sin t} = S_N(t)$$

Conclusion :

$$\sum_{k=-N}^N e^{2ikt} = \frac{\sin(2N+1)t}{\sin t} = S_N(t)$$

2. a. Chaque fonction $t \rightarrow e^{2ikt}$ est continue sur $\mathbb{R}$. L'expression précédente de $S_N(t)$ permet donc de

dire que S_N se prolonge par continuité aux points $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, par la valeur $\sum_{k=-N}^N 1 = 2N+1$.

Une autre façon de faire serait d'étudier $\lim_{t \rightarrow k\pi} \frac{\sin(2N+1)t}{\sin t}$. Or si on pose $t = k\pi + h$ on a :

$$\frac{\sin(2N+1)t}{\sin t} = \frac{\sin[(2N+1)(k\pi + h)]}{\sin(k\pi + h)} = \frac{(-1)^{(2N+1)k} \sin(2N+1)h}{(-1)^k \sin(h)} = \frac{\sin(2N+1)h}{\sin(h)} \quad 2N+1 \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

Conclusion :

S_N se prolonge en une fonction $\tilde{S}_N$ continue sur $\mathbb{R}$.

b. $\tilde{S}_N$ est 2π -périodique car $\forall t \in \mathbb{R}$, $\tilde{S}_N(t) = \sum_{k=-N}^N e^{2ikt}$ et donc $\tilde{S}_N$ apparaît comme la somme de $2N+1$ fonctions 2π -périodiques.

c. $\tilde{S}_N$ est bornée sur $\mathbb{R}$ car, $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\tilde{S}_N(t)| \leq \sum_{k=-N}^N |e^{2ikt}| = \sum_{k=-N}^N 1 = 2N+1$.

3. Soit $a > 0$, on considère l'intégrale $I_{a,N} = \int_0^{+\infty} e^{-2at} \tilde{S}_N(t) dt$.

On montre que $I_{a,N}$ est convergente en montrant qu'elle est absolument convergente.

En effet, $t \rightarrow e^{-2at} \tilde{S}_N(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc localement intégrable sur cet intervalle. Le seul

problème d'intégrale généralisée est donc en $+\infty$.

Or $|e^{-2at} \tilde{S}_N(t)| \leq (2N+1) e^{-2at}$ et $\int_0^{+\infty} (2N+1) e^{-2at} dt = \frac{2N+1}{2a}$, ce qui assure le résultat.

4. On a, par définition de $\tilde{S}_N$: $I_{a,N} = \int_0^{+\infty} e^{-2at} \tilde{S}_N(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-2at} \sum_{k=-N}^N e^{2ikt} dt = \sum_{k=-N}^N \int_0^{+\infty} e^{2ikt} e^{-2at} dt$.

$\int_0^{+\infty} e^{2ikt} e^{-2at} dt$ s'écrit, en effectuant le changement de variable $u = 2t$ $du = 2dt$ sous la forme :

$$\int_0^{+\infty} e^{2ikt} e^{-2at} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{iku} e^{-au} du = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \int_{2p\pi}^{2(p+1)\pi} e^{iku} e^{-au} du$$

car :

$$\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{iku} e^{-au} du = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_0^{2(n+1)\pi} e^{iku} e^{-au} du = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \sum_{p=0}^n \int_{2p\pi}^{2(p+1)\pi} e^{iku} e^{-au} du = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \int_{2p\pi}^{2(p+1)\pi} e^{iku} e^{-au} du$$

On déduit des deux résultats précédents que :

$$I_{a,N} = \frac{1}{2} \sum_{k=-N}^N \sum_{p=0}^{+\infty} \int_{2p\pi}^{2(p+1)\pi} e^{iku} e^{-au} du$$

5. Soit g_a l'application 2π -périodique définie par :

$$g_a(t) = \begin{cases} f_{-a}(t) & \text{si } t \in [0, \pi[\\ e^{-a\pi} f_{-a}(t - \pi) & \text{si } t \in [\pi, 2\pi[\end{cases}$$

a. Pour $t \in [0, \pi[$, on a : $g_a(t) = f_{-a}(t) = e^{-at}$ par définition de f_{-a} .

Pour $t \in [\pi, 2\pi[$, $t - \pi \in [0, \pi[$ et on a : $g_a(t) = e^{-a\pi} f_{-a}(t - \pi) = e^{-a\pi} e^{-a(t-\pi)} = e^{-at}$.

Conclusion :

$\forall t \in [0, 2\pi[$, $g_a(t) = e^{-at}$, et c'est maintenant que l'on peut affirmer que g_a est bien continue par morceaux, (et aussi C^1 par morceaux).

b. On a : $a_k(g_a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-at} \cos(kt) dt$ et $b_k(g_a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-at} \sin(kt) dt$.

Par ailleurs :

$$I_{a,N} = \frac{1}{2} \sum_{k=-N}^N \sum_{p=0}^{+\infty} \int_{2p\pi}^{2(p+1)\pi} e^{iku} e^{-au} du = \frac{1}{2} \left[\sum_{p=0}^{+\infty} \int_{2p\pi}^{2(p+1)\pi} e^{-au} du + \sum_{k=1}^N \sum_{p=0}^{+\infty} \int_{2p\pi}^{2(p+1)\pi} (e^{iku} + e^{-iku}) e^{-au} du \right] \text{ soit :}$$

$$I_{a,N} = \frac{1}{2a} + \sum_{k=1}^N \sum_{p=0}^{+\infty} \int_{2p\pi}^{2(p+1)\pi} \cos(ku) e^{-au} du$$

Mais alors, considérons l'intégrale $\int_{2p\pi}^{2(p+1)\pi} \cos(ku) e^{-au} du$ et faisons le changement de variable

$u = 2p\pi + w$, $du = dw$ et on a :

$$\int_{2p\pi}^{2(p+1)\pi} \cos(ku) e^{-au} du = \int_0^{2\pi} \cos(k(2p\pi + w)) e^{-a(2p\pi + w)} dw = e^{-2p\pi a} \int_0^{2\pi} \cos(kw) e^{-aw} dw \text{ soit :}$$

$$\int_{2p\pi}^{2(p+1)\pi} \cos(ku) e^{-au} du = \pi e^{-2p\pi a} a_k(g_a)$$

ce qui permet d'écrire $I_{a,N}$ sous la forme :

$$I_{a,N} = \frac{1}{2a} + \sum_{k=1}^N \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-2ap\pi} \pi a_k(g_a) \quad \text{et comme} \quad \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-2ap\pi} \pi a_k(g_a) = \pi a_k(g_a) \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-2ap\pi} \quad \text{on a :}$$

$$I_{a,N} = \frac{1}{2a} + \pi \left\{ \sum_{k=1}^N a_k(g_a) \right\} \left\{ \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-2ap\pi} \right\}$$

Or en prenant la deuxième convention pour $a_0(g_a)$, on a :

$$\pi a_0(g_a) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{-at} dt = \frac{1}{2a} (1 - e^{-2a\pi}) \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{2a} = \frac{\pi a_0(g_a)}{1 - e^{-2a\pi}} = \pi a_0(g_a) \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-2ap\pi}$$

Conclusion : On peut finalement écrire

$$I_{a,N} = \pi \left\{ \sum_{k=0}^N a_k(g_a) \right\} \left\{ \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-2ap\pi} \right\}$$

c. J'ai déjà utilisé le résultat : $\sum_{p=0}^{+\infty} e^{-2ap\pi} = \frac{1}{1 - e^{-2a\pi}}$, somme de la série géométrique de raison $e^{-2a\pi} < 1$.

6. Etude de $\lim_{N \rightarrow +\infty} I_{a,N}$.

Une autre expression de $I_{a,N}$ est donc $I_{a,N} = \frac{\pi}{1 - e^{-2a\pi}} \sum_{k=0}^N a_k(g_a)$.

Or d'après la question 5., on a dit que g_a était en fait de classe C^1 par morceau sur $\mathbb{R}$. Elle vérifie donc les hypothèses du théorème de Dirichlet – Jordan, donc la série de Fourier de g_a converge en tout

point t et a pour somme $\frac{1}{2} [g_a(t_-) + g_a(t_+)]$.

Ainsi, pour $t = 0$, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N a_k(g_a) = \frac{1}{2} [g_a(0_-) + g_a(0_+)] = \frac{1}{2} (1 + e^{-2a\pi})$.

Conclusion :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} I_{a,N} = \frac{\pi}{1 - e^{-2a\pi}} \times \frac{1}{2} (1 + e^{-2a\pi}) = \frac{\pi}{2} \frac{e^{a\pi} + e^{-a\pi}}{e^{a\pi} - e^{-a\pi}} = \frac{\pi}{2} \frac{ch(a\pi)}{sh(a\pi)}.$$

FIN