

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2024-2025 MATERIA: MATEMÁTICAS II	Modelo orientativo
--	--	-----------------------

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los cuatro bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

CALIFICACIÓN: Cada bloque se calificará sobre 2,5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Bloque 1. (Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 1.1. Sea λ un número real y considérense las matrices $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda & 0 & \lambda & -1 \end{pmatrix}$ y

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (0,5 puntos) Estudiar si existe algún valor de λ para el cual la matriz AB no tenga inversa.

Resolución

$AB = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda & 0 & \lambda & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $\det AB = -1 \neq 0$. Por tanto, AB siempre tiene inversa

b) (1 punto) Estudiar el rango de la matriz BA en función del parámetro λ .

Resolución

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda & 0 & \lambda & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 + \lambda^2 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 1 - \lambda^2 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

$$\det(BA) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 1 + \lambda^2 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 1 - \lambda^2 & 2\lambda \end{pmatrix} \quad f_3 - f_1 \quad \det \begin{pmatrix} \lambda & 1 + \lambda^2 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & -2\lambda^2 & 2\lambda \end{pmatrix} = \lambda(-2\lambda^2 + 2\lambda^2) = 0$$

Luego, $\text{rg}(AB) < 3$. Como el menor de BA , $\begin{vmatrix} 1 & 1 + \lambda^2 & 0 & -\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 + \lambda^2 \neq 0$, entonces $\text{rg}(AB) = 2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

c) (1 punto) Para $\lambda = 1$, discutir el sistema $A^t A(x \ y \ z) = \begin{pmatrix} a^2 & a^2 & 2a \end{pmatrix}$ según los valores de a .

Resolución

Para $\lambda = 1$, el sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} (x \ y \ z) = \begin{pmatrix} a^2 & a^2 & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} (x \ y \ z) = \begin{pmatrix} a^2 & a^2 & 2a \end{pmatrix}$$

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a^2 & 1 & 2 & 0 & a^2 & 1 & 0 & 2 & 2a \end{pmatrix}$

$\det A = 4 - 2 - 2 = 0$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, $\text{rg } A = 2$. La matriz ampliada o del sistema es

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a^2 & 1 & 2 & 0 & a^2 & 1 & 0 & 2 & 2a \end{pmatrix} \quad f_2 - f_1 \quad f_3 - f_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a^2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2a - a^2 \end{pmatrix} \quad f_3 + f_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a^2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2a - a^2 \end{pmatrix}$$

$$2a - a^2 = a(2 - a) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = 2$$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 2$, $\text{rg } A^* = 3 \neq \text{rg } A = 2$. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es incompatible

- Si $a = 0$, $A^* \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y si $a = 2$, $A^* \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Pregunta 1.2. (2,5 puntos) Se tienen garrafas de tres tamaños diferentes para llenar un aljibe. Con seis garrafas pequeñas y 2 L se llenan exactamente una garrafa mediana y una grande. Con dos garrafas grandes llenamos dos medianas, una pequeña y sobra 1 L. El aljibe se llena al completo bien con catorce garrafas pequeñas más seis medianas, bien con cinco medianas junto con cinco grandes. Se pide calcular la capacidad de cada tipo de garrafa y, una vez conocidas estas, la del aljibe.

Resolución

Sean x, y, z la capacidad de la garrafa pequeña, mediana y grande, respectivamente. Según el enunciado,

Usamos el método de Gauss. La matriz del sistema es

$$A^* = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & -2 & -1 & 14 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & f_1 & + & f_2 & 5 & f_1 & + & f_3 & -6 & 1 & 1 & 2 \\ -11 & 4 & 0 & 3 & -16 & 6 & 0 & 10 \end{pmatrix} \quad 2f_3$$

que corresponde al sistema $\begin{cases} -6x + y + z = 2 \\ -11x + 4y = 3 \\ x = 11 \end{cases}$; $-11 \cdot 11 + 4y = 3$; $y = 31$; $-6 \cdot 11 + 31 + z = 2$; $z = 37$

pequeña $\rightarrow 11$ litros mediana $\rightarrow 31$ litros grande $\rightarrow 11$ litros

Bloque 2. (Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 2.1. Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 11, & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{5x - 1}, & x \geq 2 \end{cases}$

a) (0,5 puntos) Estudie la continuidad de la función en $\mathbb{R}$.

Resolución

Para $x \neq 2$, f es continua por ser el resultado de operar con funciones continuas.

$$f(x) = 2^2 - 6 \cdot 2 + 11 = 3 = f(2) = \sqrt{5 \cdot 2 - 1} = 3 \Rightarrow f \text{ es continua en } x = 2$$

Conclusión: f es continua en $\mathbb{R}$

b) (1 punto) Estudie los extremos relativos de la función en el intervalo $(1, 3)$.

Resolución

Para $x \neq 2$, f es derivable por serlo la función polinómica y como $5x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5} < 2$, para $x > 2$ f es derivable. Además, $f'(x) = \begin{cases} 2x - 6, & \text{si } x < 2 \\ \frac{5}{2\sqrt{5x - 1}}, & x > 2 \end{cases}$

$$f'(x) = 2 \cdot 2 - 6 = -2 \neq f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5 \cdot 2 - 1}} = \frac{5}{6} \Rightarrow f \text{ NO es derivable en } x = 2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x < 2, 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x < 2, x = 3, \text{ imposible.}$$

Para $x < 2$, $f'(x) < 0$ (f decreciente) y para $x > 2$, $f'(x) > 0$ (f es creciente)

Mínimo relativo: $x = 2, y = f(2) = 3$

c) (1 punto) Calcule el área encerrada por la función y el eje OX entre $x = 1$ y $x = 3$.

Resolución

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 11, & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{5x - 1}, & x \geq 2 \end{cases}$ es decreciente si $x < 2$ y creciente si $x > 2$ y $f(2) = 3$

$$\text{Además, } x < 2, x^2 - 6x + 11 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{-8}}{2} \text{ imposible; } x > 2, \sqrt{5x - 1} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5} < 2$$

O sea, la gráfica de f no corta al eje OX

$$\text{Luego, el área que se pide es } A = \int_1^2 (x^2 - 6x + 11) dx + \int_2^3 \sqrt{5x - 1} dx$$

$$\text{Una primitiva de } (x^2 - 6x + 11) \text{ es } p(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 11x = \frac{x^3 - 9x^2 + 33x}{3}.$$

Una primitiva de $\sqrt{5x-1} = (5x-1)^{\frac{1}{2}}$ es $q(x) = \frac{1}{5} \frac{(5x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{(5x-1)^3}}{15}$. Por la regla de Barrow,

$$A = p(2) - p(1) + q(3) - q(2) = \frac{2^3 - 9 \cdot 2^2 + 33 \cdot 2}{3} - \frac{1^3 - 9 \cdot 1^2 + 33 \cdot 1}{3} + \frac{2\sqrt{(5 \cdot 3 - 1)^3}}{15} - \frac{2\sqrt{(5 \cdot 2 - 1)^3}}{15}$$

$$A = \frac{38}{3} - \frac{25}{3} + \frac{2 \cdot 14 \sqrt{14}}{15} - \frac{54}{15} = \frac{11 + 28\sqrt{14}}{15} \cong 7,72 \text{ u}^2$$

Pregunta 2.2. Dada la función $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, se pide:

a) (0,5 puntos) Estudiar la paridad de la función $g(x) = f[x f(x)]$.

Resolución

Observa que $f(-x) = \sin\left[\frac{\pi}{2}(-x)\right] = \sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = -f(x) \Rightarrow f$ es impar

$g(-x) = f[-x f(-x)] = f\{-x [-f(x)]\} = f[x f(x)] = g(x) \Rightarrow g$ es par gráfica simétrica respecto del eje Y

b) (1 punto) Calcular $\frac{\sqrt{4+3f(x)}-2}{x}$

Resolución

Como $f(0) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0\right) = 0$ Por otra parte, $f'(x) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$; $f'(0) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0\right) = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\sqrt{4+3f(x)}-2}{x} = \frac{\sqrt{4+3f(0)}-2}{0} = \frac{\sqrt{4+3 \cdot 0}-2}{0} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación.}$$

$$\text{Aplicamos L'Hôpital: } \frac{[\sqrt{4+3f(x)}-2]'}{x'} = \frac{\frac{3f'(x)}{2\sqrt{4+3f(x)}}}{1} = \frac{3f'(0)}{2\sqrt{4+3f(0)}} = \frac{3 \cdot \frac{\pi}{2}}{2\sqrt{4+3 \cdot 0}} = \frac{3\pi}{8}$$

$$\text{Por la regla de L'Hôpital } \frac{\sqrt{4+3f(x)}-2}{x} = \frac{3\pi}{8}$$

c) (1 punto) Calcular $\int_0^1 x f(x) dx$

Resolución

Halleamos una primitiva, $H(x)$, de $h(x) = x f(x) = x \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, usando la integración por partes:

$$\left[u = x \rightarrow du = dx \quad dv = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx \rightarrow v = \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\frac{\pi}{2}} \right]$$

$$H(x) = \frac{-2x \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\pi} + \frac{2}{\pi} \int \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \frac{-2x \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\pi} + \frac{2}{\pi} \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + k$$

Una primitiva de $h(x)$ es $H(x) = \frac{4 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} x\right) - 2\pi x \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right)}{\pi^2}$

Por la regla de Barrow, $\int_0^1 x f(x) dx = H(1) - H(0) = \frac{4 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} 1\right) - 2\pi 1 \cos\left(\frac{\pi}{2} 1\right)}{\pi^2} - \frac{4 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} 0\right) - 2\pi 0 \cos\left(\frac{\pi}{2} 0\right)}{\pi^2}$

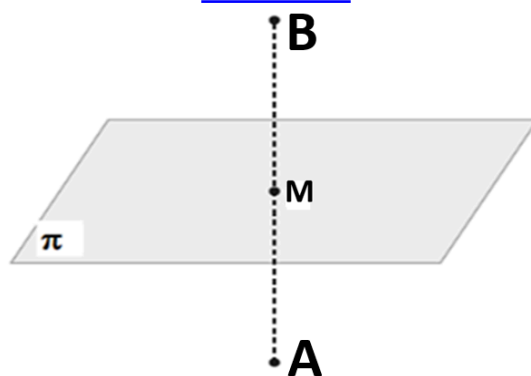
$$\int_0^1 x f(x) dx = \frac{4 \cdot 1 - 2\pi \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 2\pi \cdot 0 \cdot 0}{\pi^2} = \frac{4}{\pi^2}$$

Bloque 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 3.1. Sean los puntos $A(0, 0, 0)$ y $B(1, 1, 1)$, y la recta $r: (x, y, z) = (\lambda, \lambda, \lambda + 1), \lambda \in \mathbb{R}$.

a) (1 punto) Halle una ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos.

Resolución



Un vector normal del plano π que se pide es el vector $\vec{n} = \vec{AB} = (1, 1, 1)$

Y como π pasa por M, punto medio del segmento AB, $M\left(\frac{1+0}{2}, \frac{1+0}{2}, \frac{1+0}{2}\right) = M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, entonces

$$\pi: 1\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1\left(y - \frac{1}{2}\right) + 1\left(z - \frac{1}{2}\right) = 0, \text{ de donde } \pi: x + y + z - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 2x + 2y + 2z - 3 = 0$$

b) (1 punto) Halle una ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto B.

Resolución

$P(0, 0, 1) \in r$. El plano que se pide, π , pasa por $B(1, 1, 1)$ y tiene como vectores directores

$$\vec{d}_r = (1, 1, 1) \text{ y } \vec{PB} = (1, 1, 0). \text{ Un vector normal de } \pi \text{ es } \vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{PB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 1, 0)$$

Por tanto, $\pi: -1(x - 1) + 1(y - 1) + 0(z - 1) = 0 \Rightarrow \pi: -x + y = 0$

c) (0,5 puntos) Halle una ecuación de una recta que sea paralela a r y pase por A.

Resolución

Sabemos que $r: (x, y, z) = (\lambda, \lambda, \lambda + 1), \vec{d}_r = (1, 1, 1)$

La recta s que nos piden pasa por $A(0, 0, 0)$ y $\vec{d}_s = \vec{d}_r = (1, 1, 1)$. Luego, $s: (x, y, z) = (\lambda, \lambda, \lambda)$

Pregunta 3.2. Dados los tres planos $\pi_1: -2x - 2y + z = 0$; $\pi_2: -2x + y - 2z = 0$ y $\pi_3: x - 2y - 2z = 0$, se pide:

a) (1 punto) Determinar el ángulo que forman los planos dos a dos. Determinar la intersección de los tres planos.

Resolución

Los vectores normales de π_1 , π_2 y π_3 son $\vec{n}_1 = (-2, -2, 1)$, $\vec{n}_2 = (-2, 1, -2)$ y $\vec{n}_3 = (1, -2, -2)$

Si α es el ángulo que forman los planos π_1 y π_2 , como $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 4 - 2 - 2 = 0$, entonces $\pi_1 \perp \pi_2$

O sea, π_1 y π_2 forman un ángulo de 90°

Si β es el ángulo que forman los planos π_1 y π_3 , como $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3 = -2 + 4 - 2 = 0$, entonces $\pi_1 \perp \pi_3$

O sea, π_1 y π_3 también forman un ángulo de 90°

Si γ es el ángulo que forman los planos π_2 y π_3 , como $\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3 = -2 - 2 + 4 = 0$, entonces $\pi_2 \perp \pi_3$

O sea, π_2 y π_3 también forman un ángulo de 90°

Conclusión: los planos son perpendiculares dos a dos. Hallemos la intersección resolviendo el sistema

$\{-2x - 2y + z = 0 \quad -2x + y - 2z = 0 \quad x - 2y - 2z = 0\}$. La matriz de coeficientes es

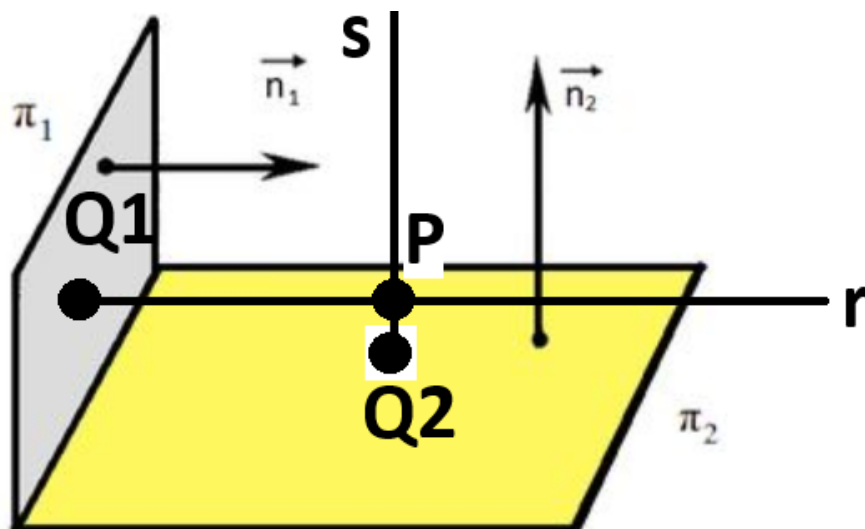
$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix};$$

$\det A = 4 + 4 + 4 - 1 + 8 + 8 = 27 \neq 0$ y por ser homogéneo $\text{rg } A^* = 3$. Luego, $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n^\circ$ de incógnitas y, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única, que es la solución trivial, $x = y = z = 0$

b) (1,5 puntos) Determinar el punto P en el espacio del que se sabe que su proyección ortogonal sobre π_1 es el punto $Q_1(1/3, 4/3, 10/3)$ y que su proyección ortogonal sobre π_2 es el punto $Q_2(-1/3, 8/3, 5/3)$. Determinar la proyección ortogonal Q_3 del punto P sobre el plano π_3 .

Resolución

P es el punto de corte de las rectas r y s del dibujo:



r pasa por Q_1 y tiene vector director $\vec{n}_1 = (-2, -2, 1) \Rightarrow$

$$r: (x, y, z) = \left(\frac{1}{3} - 2k, \frac{4}{3} - 2k, \frac{10}{3} + k \right)$$

s pasa por Q_2 y tiene vector director $\vec{n}_2 = (-2, 1, -2) \Rightarrow$

$$s: (x, y, z) = \left(\frac{-1}{3} - 2t, \frac{8}{3} + t, \frac{5}{3} - 2t \right)$$

$$\text{Luego, } \left(\frac{1}{3} - 2k, \frac{4}{3} - 2k, \frac{10}{3} + k \right) = \left(\frac{-1}{3} - 2t, \frac{8}{3} + t, \frac{5}{3} - 2t \right)$$

Igualando componentes,

$$\left\{ \frac{1}{3} - 2k = \frac{-1}{3} - 2t, \frac{4}{3} - 2k = \frac{8}{3} + t, \frac{10}{3} + k = \frac{5}{3} - 2t \right\} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 6k = -1 - 6t \\ 4 - 6k = 8 + 3t \end{cases}$$

Usamos las dos primeras ecuaciones: $\{3k - 3t = 1, 6k + 3t = -4\}$; sumando, $9k = -3, k = \frac{-1}{3}$

Sustituyendo en la 2ª ecuación, $3\frac{-1}{3} - 3t = 1; 3t = -2, t = \frac{-2}{3}$

Comprobemos si esos valores de k y t cumplen la 3ª ecuación: $3\frac{-1}{3} + 6\frac{-2}{3} = -1 - 4 = -5$ (se cumple)

Sustituyendo, por ejemplo, $k = \frac{-1}{3}$, obtenemos $P\left(\frac{1}{3} - 2\frac{-1}{3}, \frac{4}{3} - 2\frac{-1}{3}, \frac{10}{3} + \frac{-1}{3}\right) \Rightarrow P(1, 2, 3)$

Por otra parte, la proyección ortogonal, Q_3 , de $P(1, 2, 3)$ sobre $\pi_3: x - 2y - 2z = 0$ es el punto de corte de π_3 con la recta u que pasa por P y es perpendicular a π_3 , o sea que tiene vector director

$\vec{n}_3 = (1, -2, -2)$. La recta es u: $(x, y, z) = (1 + a, 2 - 2a, 3 - 2a)$

Hallémoslo: Sustituyendo en π_3 se tiene: $1 + a - 2(2 - 2a) - 2(3 - 2a) = 0, 9a - 9 = 0, a = 1$

Por tanto, $Q_3(1 + 1, 2 - 2 \cdot 1, 3 - 2 \cdot 1) \Rightarrow Q_3(2, 0, 1)$

Bloque 4. (Calificación: 2,5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Pregunta 4. Según los datos de la Comunidad de Madrid, en la temporada 2021-2022 la cobertura de la vacuna de la gripe entre mayores de 65 años fue de un 73,2%.

a) (1,5 puntos) Ante una situación de brote epidémico, las autoridades deciden restringir aquellas reuniones en las que la probabilidad de que haya más de una persona no vacunada sea mayor de 0,5. Suponiendo que los asistentes a una reunión suponen una muestra aleatoria, ¿se deberían restringir las reuniones de 5 personas mayores de 65 años? ¿Y las reuniones de 7 personas mayores de 65 años?

b) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria de 500 personas mayores de 65 años. Calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos 350 de ellos estén vacunados contra la gripe.

Resolución

Como la probabilidad de que una persona mayor sea vacunada es $73,2\% = 0,732$, la probabilidad de que no sea vacunada es $p = 1 - 0,732 = 0,268$.

$X = n^\circ$ de personas mayores no vacunadas de gripe en una muestra de m personas $\rightarrow B(m, 0,268)$

La ley de probabilidad es $p_k = p(X = k) = \binom{m}{k} 0,268^k \cdot 0,732^{m-k}$, con $k = 0, 1, 2, 3, \dots, m - 1, m$.

a)

– Para una reunión de 5 personas, la ley de probabilidad es

$$p_k = p(X = k) = \binom{5}{k} 0,268^k \cdot 0,732^{5-k}, \text{ con } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$p(X > 1) = 1 - [p(X = 0) + p(X = 1)] =$$

$$1 - \left[\binom{5}{0} 0,268^0 \cdot 0,732^5 + \binom{5}{1} 0,268^1 \cdot 0,732^4 \right] \cong 0,405 < 0,5$$

Como la reunión debe restringirse si $p(X > 1) > 0,5$, concluimos que en este caso no debe restringirse

– Para una reunión de 7 personas, la ley de probabilidad es

$$p_k = p(X = k) = \binom{7}{k} 0,268^k \cdot 0,732^{7-k}, \text{ con } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

$$p(X > 1) = 1 - [p(X = 0) + p(X = 1)] =$$

$$1 - \left[\binom{7}{0} 0,268^0 \cdot 0,732^7 + \binom{7}{1} 0,268^1 \cdot 0,732^6 \right] \cong 0,599 > 0,5$$

Como la reunión debe restringirse si $p(X > 1) > 0,5$, concluimos que en este caso SÍ debe restringirse

b) Se puede hacer aplicando la aproximación de la binomial por la normal y la corrección por continuidad de Yates: “Si una v.a. X sigue una binomial $B(n, p)$ que cumple: $n \geq 30$, $np \geq 5$

y $n(1 - p) \geq 5$, entonces, la v.a. X se puede sustituir por otra v.a. $X' \rightarrow N(\mu, \sigma)$, siendo μ la media

de X , $\mu = np$ y σ la desviación típica, $\sigma = \sqrt{np(1 - p)}$. Es decir, $X' \rightarrow N(np, \sqrt{np(1 - p)})$ “

Aquí, $n = 500 \geq 30$, $p = 0,268$; $np = 134 \geq 5$ y $n(1 - p) = 366 \geq 5$

$$\sigma = \sqrt{np(1 - p)} = \sqrt{98,088} \cong 9,9; \quad X' \rightarrow N(134; 9,9). \text{ Tipificando, } Z = \frac{X' - 134}{9,9} \rightarrow N(0, 1).$$

Piden $p(X \leq 150)$. Como los valores de X menores o iguales que 150 son 150, 149, ... tomamos un intervalo de la recta que contenga exactamente esos números. Por ejemplo, tomamos $(-\infty; 150,5)$.

$$p(X \leq 150) = p(X' \leq 150,5) = p\left(\frac{X' - 134}{9,9} \leq \frac{150,5 - 134}{9,9}\right) \cong p(Z \leq 1,67) = 0,9525 = 95,25\%$$