

Câu 1. [2D3-1.10-4] (ĐOÀN THƯỢNG-HẢI DƯƠNG LẦN 2 NĂM 2019) Cho hàm số $y = f(x)$

liên tục trên \mathbb{R} và có đạo hàm là $f'(x)$. Biết rằng $f^2(2) = 6 + 8f^2(1)$; $\int_1^2 \frac{2x+1}{x+f^2(x)} dx = \frac{11}{16}$

Tính $I = \int_1^2 \frac{f(x) + f'(x)}{x + f^2(x)} \cdot f(x) dx$

- A. $I = \frac{21}{16} + 3 \ln 2$ B. $I = \frac{21}{32} + \frac{3}{2} \ln 2$ C. $I = \frac{21}{32} + \ln 2$ D. $I = \frac{21}{16} - \frac{3}{2} \ln 2$

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Văn Hòa ; Fb: Nguyễn Văn Hòa Hòa

Chọn B

Ta có $I = \int_1^2 \frac{f(x) + f'(x)}{x + f^2(x)} \cdot f(x) dx = \int_1^2 \frac{f^2(x) + f(x) \cdot f'(x)}{x + f^2(x)} dx$

Suy ra $2I + \frac{11}{16} = \int_1^2 \frac{2f^2(x) + 2f(x) \cdot f'(x)}{x + f^2(x)} dx + \int_1^2 \frac{2x+1}{x + f^2(x)} dx$

$$= \int_1^2 \frac{2f^2(x) + 2f(x) \cdot f'(x) + 2x + 1}{x + f^2(x)} dx = \int_1^2 \left(\frac{2f^2(x) + 2x}{x + f^2(x)} + \frac{2f(x) \cdot f'(x) + 1}{x + f^2(x)} \right) dx$$

$$= \int_1^2 \frac{2f^2(x) + 2x}{x + f^2(x)} dx + \int_1^2 \frac{2f(x) \cdot f'(x) + 1}{x + f^2(x)} dx = \int_1^2 2 dx + \int_1^2 \frac{d(x + f^2(x))}{x + f^2(x)} = 2 + \ln|x + f^2(x)| \Big|_1^2$$

$$= 2 + \ln|2 + f^2(2)| - \ln|1 + f^2(1)| = 2 + \ln|8 + 8f^2(1)| - \ln|1 + f^2(1)| = 2 + \ln \frac{|8 + 8f^2(1)|}{|1 + f^2(1)|}$$

$$= 2 + \ln 8$$

Do đó $2I + \frac{11}{16} = 2 + \ln 8 \Leftrightarrow I = \frac{2 + \ln 8 - \frac{11}{16}}{2} = \frac{21}{32} + \frac{1}{2} \ln 8 = \frac{21}{32} + \frac{3}{2} \ln 2$