Лекція 12

Дискретне перетворення Фур'є (ДПФ).

$$S(n)=\sum_{k=0}^{N-1}s(k)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk},n=0,\pm1,\pm2,...,\frac{N}{2}. \qquad (5.22)$$

Формулу (5.22) можна розглядати як алгоритм обчислення спектральних коефіцієнтів $\{S(n)\}$ за заданими часовими відліками $\{S(k)\}$.

Введемо поняття **зворотного дискретного перетворення Фур'є (ЗДПФ)**

$$s(k)=C\sum_{n=0}^{N-1}S(n)e^{j\frac{2\pi}{N}kn},k=0,1,2,...,N-1. \qquad (5.23)$$

Знайдемо С – постійний коефіцієнт, для цього підставимо в (5.23) формулу (5.18)

$$s(k)=C\sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{m=0}^{N-1}S(m)e^{-j\frac{2\pi}{N}nm}\right]e^{j\frac{2\pi}{N}kn}=C\sum_{m=0}^{N-1}S(m)\sum_{n=0}^{N-1}\left[e^{j\frac{2\pi}{N}n(k-m)}\right].$$

При $m=k$ внутрішня сума дорівнює N,

$$s(k)=C\sum_{m=0}^{N-1}S(m)\sum_{n=0}^{N-1}\left[e^{j\frac{2\pi}{N}n\cdot0}\right]=C\sum_{m=0}^{N-1}S(m)\sum_{n=0}^{N-1}1=C\sum_{m=0}^{N-1}S(m)N=Cs(k)N,$$

$$s(k)=CNs(k),CN=1,C=\frac{1}{N},$$

а при любому іншому m – нулю (як сума векторів, кінці яких розділяють окружність одиничного радіусу на рівні дуги), тобто ЗДПФ має вигляд:

$$s(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}S(n)\left[e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\right],k=0,1,...,N-1. \qquad (5.24)$$

5.10 Властивості дискретного перетворення Фур'є

1) Лінійність.

Якщо послідовності $\{x(k)\}$ відповідає набір гармонік $\{\dot{X}(n)\}$, а послідовності $\{y(k)\}$ відповідає набір $\{Y(n)\}$ (у $\{x(k)\}$ та $\{y(k)\}$ однаковий період N), тоді послідовності $\{a\cdot x(k)+b\cdot y(k)\}$ відповідає спектр

$$\dot{a}X(n)+\dot{b}Y(n).$$

2) ДПФ затриманої послідовності.

Якщо є початкова послідовність $\{x(k)\}$, її затримали на один такт та отримали $\{y(k)=x(k-1)\}$, то спектр нової затриманої послідовності буде мати вигляд

$$\{Y(n)\}=\dot{X}(n)\exp\left(-j\frac{2\pi n}{N}\right),$$

в безперервному випадку був множник $\exp(-j\omega t)$.

3) Симетрія ДПФ.

Як ми знаємо для безперервного сигналу $\dot{S}(-\omega)=\dot{S}^*(\omega)$. Для дискретних сигналів

$$\dot{X}(-n)=\dot{X}^*(n). \tag{5.25}$$

4) Значення при $n=0, n=\frac{N}{2}$.

Гармоніка з нульовим номером (постійна компонента) це сума відліків послідовності на одні́м її періоді:

$$\dot{X}(0)=\sum_{k=0}^{N-1}x(k)e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}=|n=0|=\sum_{k=0}^{N-1}x(k)e^{0}=\sum_{k=0}^{N-1}x(k). \tag{5.26}$$

Якщо N – парна, то амплітуда гармоніки з номером $\frac{N}{2}$ є сумою відліків із знаками, які йдуть по черзі:

$$\dot{X}\left(\frac{N}{2}\right)=\left|e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}=e^{-j\frac{2\pi k}{N}\cdot\frac{N}{2}}=e^{-j\pi k}\right|=x(0)-x(1)+...+x(N-2)-x(N-1)=\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k x(k).$$

Таким чином, спектр складається з такої ж кількості інформації, що й сам сигнал, він є «спряжено-симетричним» відносно $\frac{N}{2}$.

5) Якщо начальна послідовність – це набір з N дійсних чисел, то спектр представляється набором з $\frac{N}{2}$ комплексних чисел, кожне з яких з інформаційної точки зору еквівалентно двом дійсним (тобто коефіцієнти ДПФ, номери яких розміщені симетрично відносно , створюють сполучені пари $\frac{N}{2}$):

$$\dot{X}(N-n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}x(k)e^{-j\frac{2\pi(N-n)k}{N}}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}x(k)e^{+j\frac{2\pi nk}{N}}=\dot{X}^*(n)$$

Тобто можна вважати, що складові $\dot{X}\left(\frac{N}{2}+1\right),...,\dot{X}(N-1)$ відповідають негативним частотам. При вивченні амплітудного спектру сигналу вони не дають нових відомостей.

Якщо начальна послідовність $\{x(k)\}$ не є дійсною, то симетрія спектру відсутня та N комплексним відлікам у часовій області відповідає N комплексних відліків у спектральній області.

6) ДПФ добутку послідовностей.

Нехай є дві послідовності відліків $\{x_1(k)\}$ та $\{x_2(k)\}$ однакової довжини N. Результат їх поелементного перемноження

$$y(k)=x_1(k)x_2(k).$$

Застосуємо до цього виразу ДПФ, отримаємо

$$\dot{Y}(n)=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\dot{X}_1(i)\dot{X}_2(n-i). \qquad (5.27)$$

При обчисленні (5.27) можуть знадобитися значення $\dot{X}_2(i)$ з номерами, що виходять за рамки діапазону $0...N-1$. В цьому випадку необхідно скористатися властивістю періодичності спектра:

$$\dot{X}_2(i)=\dot{X}_2(i\pm N).$$

При $n=0$ отримаємо **дискретний аналог теореми Релея**, яка зв'язує суму добутку сигналів з сумою добутку спектрів (використані вирази (5.26) та (5.27)).

$$\dot{Y}(0)=\sum_{k=0}^{N-1}x_1(k)x_2(k)=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\dot{X}_1(i)\dot{X}_2(-i)=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\dot{X}_1(i)\dot{X}_2^*(i).$$

Якщо $x_1(k)=x_2(k)=x(k)$ для всіх $k=0...N-1$, отримаємо дискретний аналог рівності Персеваля

$$\sum_{k=0}^{N-1}x^2(k)=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\left|\dot{X}(i)\right|^2.$$

7) ДПФ колової згортки послідовностей.

Так як ми розглядаємо періодичні послідовності, то й складання при обчислюванні згортки таких послідовностей слід проводити на одному періоді. Таку операцію називають коловою згорткою:

$$y(k)=\sum_{i=0}^{N-1}x_1(i)x_2(k-i)=\sum_{i=0}^{N-1}x_1(i)x_2\left((k-i)\bmod N\right). \qquad (5.28)$$

де $\left((k-i)\operatorname{mod} N\right)$ – операція взяття $(k-i)$ за модулем N, тобто обчислення остатку від ділення $(k-i)$ на N.

Підставимо (5.28) у (5.23) та отримаємо, що колова згортка періодичних часових послідовностей відповідає перемноженню їх спектрів:

$$\dot{Y}(n)=\dot{Y}_1(n)\dot{Y}_2(n). \qquad (5.29)$$

5.11 Відновлення безперервного сигналу за допомогою ДПФ

ДПФ за суттю є спектром дискретизованого періодичного сигналу, тому воно дозволяє відновити безперервний періодичний сигнал. Для цього в формулі ЗДПФ

$$x(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\dot{X}(n)\exp\left\{j\frac{2\pi nk}{N}\right\}$$

необхідно замінити дискретний параметр (номер відліку k) на безперервний – нормований час $\frac{t}{T}$, де T – період дискретизації. Тоді

$$x(t)=\frac{1}{N}\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1}\dot{X}(n)\exp\left\{j\frac{2\pi nt}{T}\right\}. \qquad (5.30)$$

Також зміниться діапазон індексів додавання: $\sum\limits_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1}$ – при парному N.

При непарному – $\sum\limits_{n=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{(N-1)}{2}}$. Наприклад: $N=4$, $\sum\limits_{n=-\frac{4}{2}}^{\frac{4}{2}-1}$ – додаються $n=-2,-1,0,1$.

При $N=5$, $\sum\limits_{n=-\frac{(5-1)}{2}}^{\frac{(5-1)}{2}}$ – додаються $n=-2,-1,0,1,2$.

Ці зміни діапазонів індексів необхідні, щоб отримати аналоговий сигнал, який займає полосу частот від 0 до $\frac{\pi}{T}$. Коефіцієнти з від’ємними номерами можуть бути отримані із співвідношення симетрії

$$\dot{X}(-n)=\dot{X}^*(n).$$

Результат відновлення безперервного періодичного сигналу за допомогою ДПФ, співпадає з результатом, отриманим при використанні ряду Котельникова, але використання ДПФ краще тим, що у виразі (5.25) міститься кінцеве число складових, а в ряді Котельникова – нескінченне число складових для періодичного сигналу.

4 Кореляційний аналіз

4.1 Функція автокореляції сигналу

Для кількісного визначення ступеню відмінності сигналу $u(t)$ та його зміщеної копії $u(t-\tau)$ вводять функцію автокореляції $K_u(\tau)$, яка дорівнює скалярному добутку цих сигналів:

$$K_u(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) u(t-\tau)\, dt \quad . \qquad (4.1)$$

При цьому вважаємо, що сигнал, який досліджується, локалізовано у часі, тобто інтеграл (4.1) не прагне до нескінченності.

При $\tau = 0$ вираз (4.1) дорівнює енергії сигналу

$$K_u(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) u(t-0)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t) dt = E_u \quad . \qquad (4.2)$$