

UBND TỈNH HÀ NAM
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
Năm học 2022-2023

Môn: Toán (Đề chuyên)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao
đề

Câu I. (2,0 điểm) Cho biểu thức:

$$(x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4).$$

$$A = \left(\frac{x^2 - 9}{x^2 - 4} - \frac{9 - x}{x - 1} \right) : \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

$$\left(\frac{x^2 - 9}{x^2 - 4} - \frac{9 - x}{x - 1} \right) : \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

1. Rút gọn biểu thức A .

2. Tìm tất cả các giá trị của x để $A > -2$.

Câu II. (2,0 điểm)

1. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = (m - 2)x + 2m - 1$ (với m là tham số) và

điểm

$A(-1; 2)$. Tìm tất cả các giá trị của m để khoảng cách

từ điểm A đến đường thẳng

(d) đạt giá trị lớn nhất.

2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x - y - 1)(x^2 + y^2 + 1) = x^2 + y^2 \\ -x + y + 3 \end{cases}$$

$$-x + y + 3$$

}

$$\sqrt{\frac{1}{|}} + + = -^2 + +$$

Câu III. (4,0 điểm) Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có các góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Các đường cao AK, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H và cắt đường tròn $(O; R)$ tại các điểm lần lượt là M, N, P (M khác A, N khác B, P khác C).

1. Chứng minh $EF \parallel PN$.

2. Chứng minh diện tích tứ giác $AEOF$ bằng $EF \cdot R \cdot 2$

3. Tính giá trị của biểu thức $AM + BN + CP$.

AK, BE, CF cắt AB, AC tại điểm J (J khác A).

4. Gọi S và Q là chân đường vuông góc kẻ từ điểm K đến các cạnh BC, QS cắt BC tại G , đường thẳng GA cắt đường tròn $(O; R)$ tại điểm J (J khác A).

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BCQS$. Chứng minh ba điểm hàng.

Câu IV. (1,0 điểm) Tìm tất cả các cặp số

I, K, J thẳng

nguyên $(x; y)$ thỏa mãn:

$$\begin{aligned} & x^4 - 6x^3 + 18x^2 - y^2 \\ & - 32x + 4y + 20 = \\ & 0. \end{aligned}$$

Câu V. (1,0 điểm) Cho ba a, b, c thỏa mãn số thực dương

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab - 2bc - 2ca = 0.$$

Chứng minh:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{(a + b - c)^2} \geq 3.$$
$$+ a + b$$

--- HẾT ---

Thí sinh không được sử dụng tài liệu, người coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NAM**

**KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
CHUYÊN**

Năm học: 2022-2023

(Hướng dẫn chấm thi có 05 trang)

ĐỀ CHÍNH THỨC

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN (ĐỀ CHUYÊN)

Ghi chú:

- Điểm toàn bài không làm tròn.
- Các cách giải khác mà đúng cho điểm tương đương.

Nội dung	Điểm
Câu 1 (2,0 điểm) . Cho biểu thức: $A = \left(\frac{x^2 - 2}{x + 3} + \frac{x - 3}{x + 2} - \frac{9 - x}{x - 6} \right) : \frac{1}{x + 2} \quad (x \geq 0; x \neq 4; x \neq 1).$	
1. (1,5 điểm) Rút gọn biểu thức A . $A = \frac{(x - 2)^2 - (x - 3)(x + 3) - 9 + x}{(x + 3)(x - 2)(x + 2)} : \frac{1}{x + 2}$ $= \frac{(x - 2)^2 - (x - 9) - 9 + x}{(x + 3)(x - 2)(x + 2)} : \frac{1}{x + 2}$	0,5
$= \frac{(x + 3)(x - 2)}{(x + 3)(x - 2)(x + 2)} : \frac{1}{x + 2}$	0,25

$= \frac{(x-2)^2}{(x+3)(x-2)(x+3)(x-1)}$	0,25
$= \frac{x-2}{(x+3)(x-1)}$	0,25
$= \frac{x-2}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{x-1}$	0,25
2. (0,5 điểm) Tìm tất cả các giá trị của x để $A > -2$.	
$A = x - 3x + 2 > -2 \quad (\forall x \geq 0; x \neq 4; x \neq 1).$ $\Leftrightarrow x - 3x + 4 > 0 \Leftrightarrow \left \frac{x-2}{x-1} \right + 4 > 0 \quad (\forall x \geq 0; x \neq 4; x \neq 1).$	0,25
Vậy $A > -2$ với $\forall x \geq 0; x \neq 4; x \neq 1$	0,25
Câu 2 (2,0 điểm).	
1. (1,0 điểm) Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = (m-2)x + 2m-1$ và điểm $A(-1; 2)$. Tìm tất cả các giá trị của m để khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng (d) đạt giá trị lớn nhất.	

là điểm cố định nằm trên đường thẳng d

0,25

$$\Leftrightarrow y_0 = (m-2)x_0 + 2m - 1 \text{ có nghiệm với } \forall m$$

$$\Leftrightarrow m(x_0 + 2) - 2x_0 - y_0 - 1 = 0 \quad (\forall m)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 2 = 0 \\ -2x_0 - y_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = 3 \end{cases} \Rightarrow M(-2; 3)$$

$$\begin{matrix} | & 0 & 0 & | & 0 \end{matrix}$$

Gọi H là hình chiếu của A trên $d \Rightarrow AH \leq AM$ Khoảng cách AH lớn nhất là AM khi $H \equiv M \Leftrightarrow AM \perp d$

0,25

Phương trình đường thẳng $AM: y = -x + 1$

0,25

$$AM \perp d \Leftrightarrow (m-2) \cdot (-1) = -1 \Leftrightarrow m = 3.$$

0,25

$$|(x-y-1) \cdot (x^2 + y^2 + 1)| = x^2 + y^2 - x + y + 3 \quad (1)$$

2 (1,0 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}$

$$\begin{matrix} \sqrt{} & \sqrt{} \\ | & + & + & y + 3 = -^2 + & + & () \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \sqrt{} & \sqrt{} \end{matrix}$$

$$\text{ĐK: } \begin{cases} x \geq -6 \\ y \geq -3 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \sqrt{} & \sqrt{} \\ | & \end{matrix}$$

0,25

$$(x-y-1) \cdot (x^2 + y^2 + 1) = x^2 + y^2 - x + y + 3$$

0,25

$$\Leftrightarrow (x-y-2) \cdot (x^2 + y^2 + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-y-2=0 \quad (x^2 + y^2 + 2 > 0 \quad \forall x, y)$$

Thay $y = x - 2$ vào phương trình (2)

0,25

$$x + 6 + x + 1 = -x^2 + 2x + 8, (x \geq -1)$$

$$x + 6 + 3 \quad x + 1 + 2 \quad x^2 \quad 2x \quad 3 \quad 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{x-3} + \frac{x-3}{x-3} + (x-3)(x+1) = 0$$

$$x + 6 + 3 \quad x + 1 + 2$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \left(\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-3} + x+1 \right) = 0$$

0,25

$$\left| \begin{array}{cc} x+6+3 & x+1+2 \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \quad \left(\text{do } \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-3} + x+1 > 0, \forall x \geq -1 \right)$$

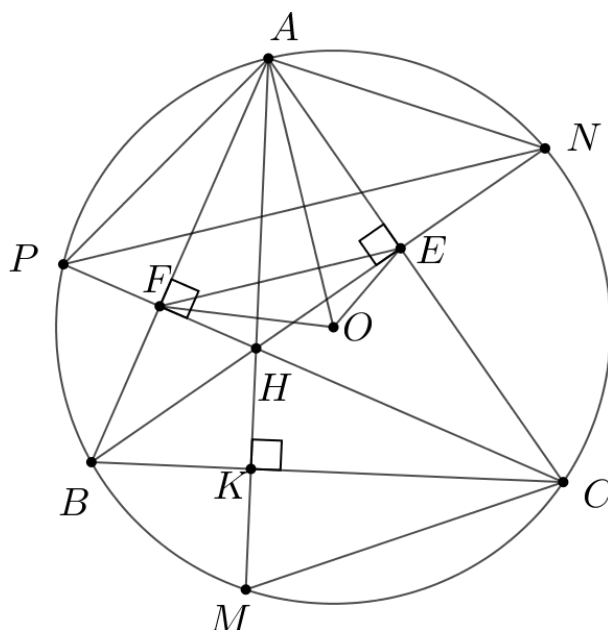
$$\left| \begin{array}{cc} x+6+3 & x+1+2 \end{array} \right|$$

$$x = 3 \Rightarrow y = 1.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (3; 1)$

Câu III. (4 điểm) Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có các góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$.

Các đường cao AK, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H và cắt đường tròn $(O; R)$ tại các điểm lần lượt là M, N, P (M khác A, N khác B, P khác C).



1. (1,0 điểm) Chứng minh $EF \parallel PN$.	
$\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn đường kính BC	0,25
$\Rightarrow \angle CBE = \angle CFE$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $E^{\circ}C$)	0,25
Mà $\angle CBE = \angle CPN$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $C^{\circ}N$)	0,25
$\Rightarrow \angle CFE = \angle CPN \Rightarrow EF \parallel PN$	0,25
2. (1,0 điểm) Chứng minh diện tích tứ giác $AEOF$ bằng $\frac{EF \cdot R}{2}$.	
$\angle BAN = \angle PCN$ (cùng phụ với $\angle BAC$) $\Rightarrow AN = AP$	0,25
$ON = OP = R$	0,25
$\Rightarrow A, O$ nằm trên đường trung trực của PN $\Rightarrow AO \perp PN$	0,25
Mà $EF \parallel PN \Rightarrow AO \perp EF \Rightarrow S_{AEOF} = \frac{EF \cdot R}{2}$	0,25

3. (1,0 điểm) Tính giá trị của biểu thức $\frac{AM}{AK} + \frac{BN}{BE} + \frac{CP}{CF}$.

$$\frac{AM}{AK} + \frac{BN}{BE} + \frac{CP}{CF}$$

$\widehat{B}AM = \widehat{B}CM$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{B}M$)

$\widehat{B}AM = \widehat{B}CF$ (cùng phụ với $\widehat{A}BC$)

$$\Rightarrow \widehat{B}CF = \widehat{B}CM$$

ΔMCH có CK vừa là đường phân giác vừa là đường cao

$\Rightarrow \Delta MCH$ cân tại $C \Rightarrow K$ là trung điểm của MH

0,25

$\frac{AK}{AK} + \frac{BE}{BE} + \frac{CF}{CF} = \frac{AK + KM}{AK} + \frac{BE + EN}{BE} + \frac{CF + FP}{CF}$ $= 3 + \frac{KM}{AK} + \frac{EN}{BE} + \frac{FP}{CF}$	0,25
$KM = KH = \frac{S_{\Delta BHC}}{AK}$ $AK = \frac{S_{\Delta ABC}}{AK}$ Chúng minh tương tự: $EN = \frac{S_{\Delta AHC}}{BE}$; $FP = \frac{S_{\Delta AHB}}{CF}$ $\frac{BE}{S_{\Delta ABC}} + \frac{CF}{S_{\Delta ABC}} = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABC}} = 1$	0,25
$\frac{AM}{AK} + \frac{BN}{BE} + \frac{CP}{CF} = 3 + \frac{S_{\Delta BHC}}{S_{\Delta ABC}} + \frac{S_{\Delta AHC}}{S_{\Delta ABC}} + \frac{S_{\Delta AHB}}{S_{\Delta ABC}} = 3 + 1 = 4.$	0,25
4. (1,0 điểm) Gọi S và Q là chân đường vuông góc kẻ từ điểm K đến các cạnh AB, AC . Đường thẳng QS cắt BC tại G , đường thẳng GA cắt đường tròn $(O; R)$ tại điểm J (J khác A). Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BCQS$. Chứng minh ba điểm I, K, J thẳng hàng.	

$K = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên $ASKQ$ là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{ASQ} = \widehat{AKQ}$$

$$\widehat{AKQ} = \widehat{BCQ} \text{ (cùng phụ với } \widehat{CKQ} \text{)}$$

0,25

$$\text{Do đó } \widehat{ASQ} = \widehat{BCQ}$$

Suy ra $BSQC$ là tứ giác nội tiếp.

$$\Rightarrow \widehat{BS} = \widehat{QC}$$

$$\Delta GBS \sim \Delta GQC (g.g) \Rightarrow \frac{GB}{GQ} = \frac{GS}{GC} \Rightarrow GB \cdot GC = GS \cdot GQ$$

$$(1) \cdot \frac{GQ}{GC}$$

$$\text{Vì } ASKQ \text{ là tứ giác nội tiếp nên: } \widehat{QK} = \widehat{AK}$$

0,25

$$\text{Mà } \widehat{AK} = \widehat{KS} \text{ (cùng phụ với } \widehat{BK} \text{)}$$

$$\text{nên } \widehat{QK} = \widehat{KS}$$

$$\Delta GQK \sim \Delta GKS (g.g) \Rightarrow \frac{GQ}{GK} = \frac{GK}{GS} \Rightarrow GK^2 = GS \cdot GQ \quad (2)$$

$$\frac{GK}{GS}$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow GK^2 = GB \cdot GC$$

$$\widehat{JB} = \widehat{CA} \Rightarrow \Delta GJB \sim \Delta GCA \Rightarrow \frac{GJ}{GC} = \frac{GB}{GA}$$

$$\frac{GC}{GA}$$

$$\Rightarrow GJ \cdot GA = GB \cdot GC$$

$$\Rightarrow GK^2 = GJ \cdot GA \Rightarrow GK = GJ$$

$$\frac{GA}{GK}$$

$$\Rightarrow \Delta GKJ \sim \Delta GAK \Rightarrow \widehat{JK} = \widehat{KA} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow AJ \perp JK$$

JK cắt (O) tại D (D khác K) thì AD là đường kính của (O) . Gọi

0,25

I là trung điểm KD , L là trung điểm QC .

Khi đó OI là đường trung bình của $\Delta AKD \Rightarrow OI \parallel AK \Rightarrow OI \perp BC$

n OI là trung trực BC (3) ———

g vuông góc AC) nên $KQCD$ là hình thang.

$\Rightarrow IL$ là đường trung bình của hình thang $KQCD$

$\Rightarrow IL \parallel KQ \Rightarrow IL \perp QC$

$\Rightarrow IL$ là trung trực của QC (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BSQC$

Vậy I, K, J thẳng hàng.

0,25

Câu IV. (1 điểm) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn:

$$x^4 - 6x^3 + 18x^2 - y^2 - 32x + 4y + 20 = 0.$$

$$x^4 - 6x^3 + 18x^2 - y^2 - 32x + 4y + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 32x + 24 = y^2 - 4y + 4$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 (x^2 - 2x + 6) = (y-2)^2$$

$$\text{Với } y = 2 \Rightarrow x = 2$$

Với $y \neq 2$ ta có $(y-2)^2$ và $(x-2)^2$ là số chính phương khác 0 nên $x^2 - 2x + 6$ là số chính phương.

$$\text{Đặt } x^2 - 2x + 6 = m^2 \ (m \in \mathbb{N}^*)$$

$$(x-1)^2 + 5 = m^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1-m)(x-1+m) = -5$$

0,25

0,25

$$\begin{cases} x-1+m = 5 \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1-m = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1+m = 5 \\ x-1-m = -1 \end{cases} \quad (x-1+m > x-1-m)$$

$$\begin{cases} x-1+m = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1-m = -5 \end{cases}$$

0,25

$\begin{cases} \\ m = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} \\ \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \\ x = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} \\ m = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} \\ \end{cases}$	
• $x = 3 \Rightarrow (y - 2)^2 = 9 \Rightarrow y = 5$ hoặc $y = -1$ • $x = -1 \Rightarrow (y - 2)^2 = 81 \Rightarrow y = 11$ hoặc $y = -7$ Vậy các bộ $(x; y)$ nguyên thỏa yêu cầu bài toán là $(2; 2), (3; 5), (3; -1), (-1; 11), (-1; -7)$.	0,25
Câu V. (1 điểm) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 + ab - 2bc - 2ca = 0.$ Chứng minh : $\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{(a + b - c)^2} + \frac{ab}{a + b} \geq 3.$	
$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{(a + b - c)^2} + \frac{ab}{a + b} \geq \Leftrightarrow \frac{c^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{(a + b - c)^2} + \frac{ab}{a + b} \geq 2$ Đặt $x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{c} (x, y > 0)$ $\frac{a^2 + b^2 + c^2 + ab - 2bc - 2ca}{c^2} = 0$ $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 1 + xy - 2x - 2y = 0 \Leftrightarrow (x + y - 1)^2 = xy$	0,25
Áp dụng bất đẳng thức Cô-si: $xy \leq \frac{(x + y)^2}{4}$ Do đó: $(x + y - 1)^2 \leq \frac{(x + y)^2}{4} \Rightarrow \left[\frac{(x + y)^2}{4} - 2 \right] \cdot \left[2 - \frac{(x + y)^2}{4} \right] \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4}{3} \leq x + y \leq \frac{8}{3}$	0,25

$$\frac{c^2}{a+b} + \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a}$$

$$(a+b+c)^2 \geq 3(a+b+c)$$

$$= \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{(x+y-1)^2} + \frac{xy}{x+y} = \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{xy} + \frac{xy}{x+y}$$

$$= \left(\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{1}{2xy} \right) + \left(\frac{1}{2xy} + \frac{xy}{x+y} \right) \geq \frac{4}{(x+y)^2} + \frac{2}{2(x+y)} \cdot \frac{1}{xy}$$

0,25

$$P \geq \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

$$2^2 = 2.2$$

0,25

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = 1 \Leftrightarrow a = b = c = \sqrt{2}$

$$\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\sqrt{2}}}$$

$$\sqrt{2}$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NAM

ĐỀ CHÍNH THỨC

SINH LỚP 10 THPT
UYÊN

2021-2022

1 (Đề chuyên)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể
thời gian giao đề

√

Câu I. (2,0 điểm) Cho biểu
thức

$$S = \left| \frac{a+1}{ab} - \frac{a}{ab} \right| a + \frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+b} + 1 : \frac{a}{a+b} - ab$$

với $a \geq 0, b \geq 0, a^2 + b^2 > 0$ và $ab \neq 1$.

√

1. Rút gọn biểu thức S .

2. Tính giá trị của biểu thức S khi $a = 3 + 2\sqrt{2}$ và $b = 11 - 6\sqrt{2}$.

Câu II. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $x^2 - 4x + 4 = 0$.

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 1} = 0$$

2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Câu III. (3,5
điểm) Cho đường
tròn (O)

đường kính

$$AB = 2R.$$

Gọi Δ là tiếp tuyến của

(O) tại

A. Trên Δ lấy điểm M sao cho $MA > R$.

Qua M vẽ tiếp tuyến MC (C thuộc

đường tròn (O) , C khác A).

Gọi H và D lần lượt là hình chiếu
vuông góc của C trên

AB và

AM . Gọi d là đường thẳng đi qua điểm O và vuông góc với

AB . Gọi N là giao

điểm của d và BC .

1. Chứng minh $OM \parallel BN$ và

$$MC = NO.$$

2. Gọi CH ,

Q là
giao
điểm
của
 MB
và

K là giao điểm của OM .
 AC và

Chúng

minh đường thẳng QK đi qua trung điểm của đoạn thẳng BC .

3. Gọi F là giao điểm AM ,
của QK và

E là giao điểm CD và OM .
Chứng minh tứ

giác $FEQO$ là hình bình hành. Khi M thay đổi Δ , tìm giá trị lớn nhất của $QF + EO$.
trên

Câu IV. (1,5 điểm)

1. Giải phương trình

$$x^3 + y^2 - x + 3z = 2021 \text{ với}$$

x, y và z là các số nguyên.

2. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 1. Bên trong hình vuông người ta lấy

tùy ý 2021 điểm $A_1, A_2, \dots, A_{2021}$
phân biệt

sao cho 2025 điểm

$A, B, C, D, A_1, A_2, \dots, A_{2021}$

không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng
từ 2025

điểm trên luôn tồn tại 3 điểm là 3 đỉnh của hình tam giác có diện tích không quá $\frac{1}{4044}$.

4044

Câu V. (1,0 điểm) Cho ba x, y, z thỏa mãn
số thực dương

$x + y + z \leq 1$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{1}{1-x} \right) \left(\frac{1}{1-y} \right) \left(\frac{1}{1-z} \right) \geq 512.$$

$$\left| x^2 \right| \left| y^2 \right| \left| z^2 \right|$$

()()()

--- HẾT ---

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN CHUYÊN

(Hướng dẫn chấm thi có 05 trang)

Lưu ý: - Điểm làm tròn đến 0,25.

- Các cách giải khác mà đúng cho điểm tương đương.

Nội dung	Điểm
Câu I. (2,0 điểm) Cho biểu thức $S = \left(\frac{a+1}{\sqrt{ab+1}} + \frac{\sqrt{ab}+a}{\sqrt{-ab}} + 1 \right) : \frac{a+a+b+\sqrt{ab}}{\sqrt{-ab}}$ với $a \geq 0, b \geq 0, a^2 + b^2 > 0$ và $ab \neq 1$.	
1.(1,0 điểm) Rút gọn biểu thức S	
$S = \frac{(a+1)(1-\sqrt{ab}) + \sqrt{ab}(\sqrt{ab}+a) + 1 - ab}{\sqrt{ab+1}(\sqrt{-ab} + \sqrt{-ab})}$ $= \frac{a + b + ab}{1 - ab}$	0,25

$= \frac{2a+2}{1-ab} : \left(\frac{a+b}{a+1} \right)$	0,25
$= \frac{2a+2}{1-ab} \cdot \frac{1-ab}{(a+b)(a+1)}$	0,25
$= \frac{2}{a+b}$	0,25
2.(1,0 điểm) Tính giá trị của biểu thức S với $a = 3 + 2\sqrt{2}$ và $b = 11 - 6\sqrt{2}$.	
$a = 3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2 \Rightarrow a = 1 + \sqrt{2}.$	0,5
$b = 11 - 6\sqrt{2} = (3 - \sqrt{2})^2 \Rightarrow b = 3 - \sqrt{2} = 3 - \sqrt{2}.$	0,25
$S = \frac{2}{\frac{1}{1+2+3-\sqrt{2}}} =$	0,25

m)

Giải phương trình: $x^2 - x + 4 = (2 + x) \sqrt{x^2 - x + 4} = 0$.

Phương trình $x^2 - x + 4 = (2 + x) \sqrt{x^2 - x + 4} = 0$. (1)

TXĐ: $\mathbb{R}$.

0,25

Đặt $t = \sqrt{x^2 - x + 4}$ ($t \geq 0$), khi đó phương trình (1) trở thành

$$t^2 - (2 + x)t + 2x = 0 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow (t - 2)(t - x) = 0.$$

0,25

Với $t = 2 \Rightarrow x^2 - x + 4 = 2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 1$.

0,25

Với $t = x \Rightarrow x^2 - x + 4 = x \Rightarrow -x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4$.

0,25

Thử lại, ta đi tới kết luận $S = \{0; 1; 4\}$.

2. (1,0 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{y-1} = 2 \\ \sqrt{x-2} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases}$

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{y-1} = 2 \\ \sqrt{x-2} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases}$$

$$y - 2 = 0$$

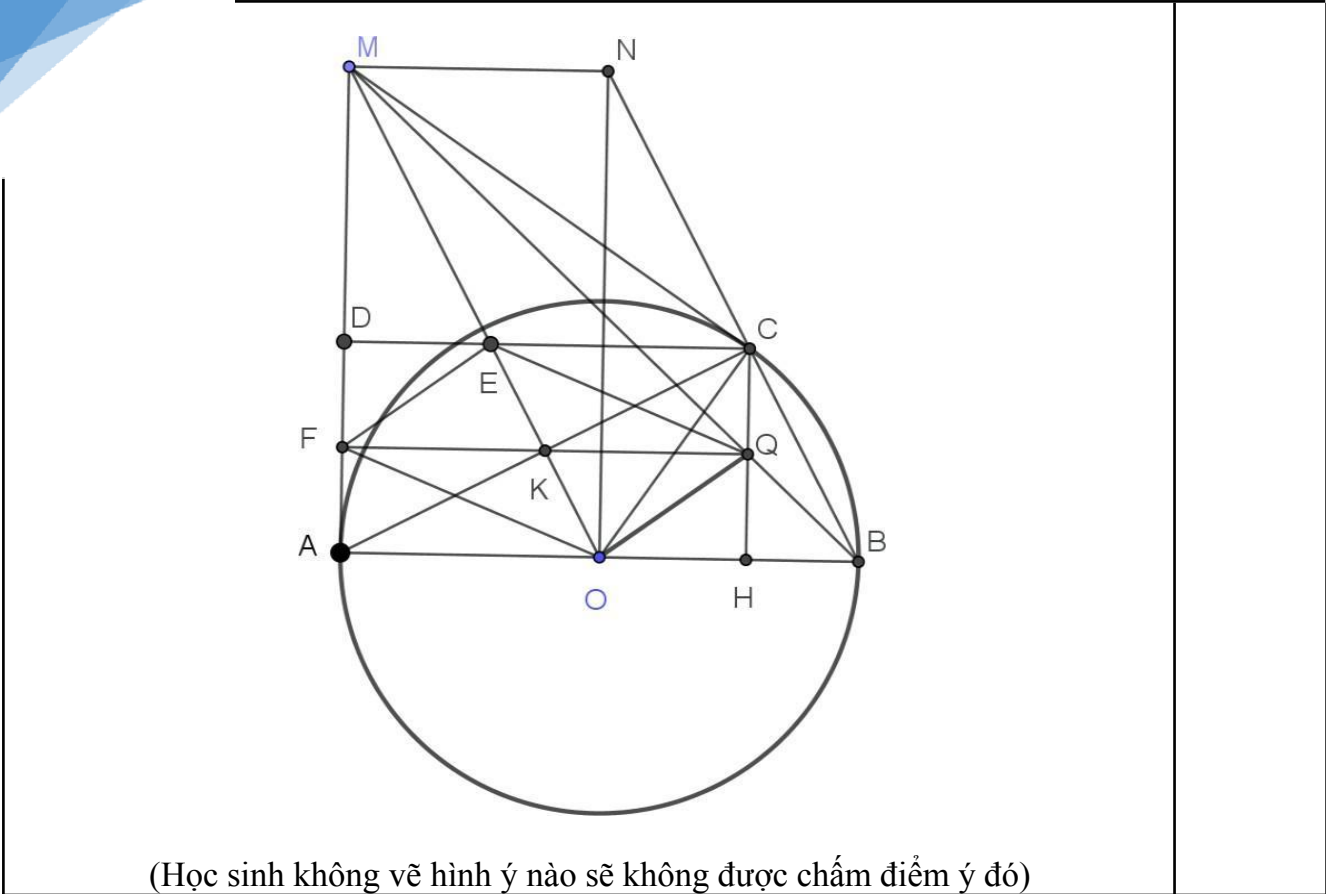
0,25

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq -2 \\ y \geq -1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2xy + x - 4y - 2 \geq 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0; 2y + 1 \geq 0 \\ y \geq -1 \end{cases}$$

$\begin{cases} x - 2 - 2(-)(\quad) + 2y + 1 = 0 \\ \end{cases}$	
Phương trình $x - 2 - 2(-)(\quad) + 2y + 1 = 0$ $\Leftrightarrow (x - \quad - y + \quad)^2 = \quad \Leftrightarrow x - 2 = 2y + \quad$	0,25
$\begin{cases} x - 2 = y + 1 \\ \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2 = 1 \\ x = 3 \end{cases}$ Khi đó ta có hệ $\begin{cases} \quad \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \quad \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \quad \end{cases}$ (thỏa mãn) $\begin{cases} x - 2 + 3 \cdot 2y + 1 = 4 \\ 2y + 1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \end{cases}$	0,25
Suy ra hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; 0)$.	0,25
Câu III. (3,5 điểm) Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Gọi Δ là tiếp tuyến của (O) tại A. Trên Δ lấy điểm M di động sao cho $MA > R$. Qua M dựng tiếp tuyến MC (C thuộc đường tròn (O), C khác A). Gọi H và D lần lượt là hình chiếu vuông góc của C lên AB và AM. Gọi d là đường thẳng qua điểm O và vuông góc với AB. Gọi N là giao điểm của d và BC.	



1 (1.5 m ³) > 0.15	1 (0.15 // 0.15) > 0.15	NO
--------------------------------	-------------------------	----

1.(1,5 diem) Chứng minh $OM \parallel BN$ và $MC \equiv NO$.	
---	--

Ta có $MA = MC$ và $OA = OC$ suy ra MO là đường trung trực của đoạn thẳng AC, suy ra $MO \perp AC$. (1).	0,25
--	-------------

--	--

Do $\widehat{ACB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên	0,25
$\widehat{ACB} = 90^\circ \Rightarrow AC \perp BN. \quad (2)$	

Từ (1) và (2) suy ra $MO \parallel BN$.	0,25
--	-------------

Xét ΔMAO và ΔNOB	
----------------------------------	--

vuông tại A và O ; $AO = OB$; $\widehat{AOM} = \widehat{NBO}$ (hai góc đồng vị)	0,5
---	------------

Suy ra $\Delta MAO = \Delta NOB \Rightarrow MA = NO$.

Mặt khác : $MA = MC \Rightarrow MC = ON.$ (2)	0,25
---	------

2.(1,0 điểm) Gọi Q là giao điểm của MB và CH . Gọi K là giao điểm của AC và OM . Chứng minh đường thẳng QK đi qua trung điểm của đoạn thẳng CB .	
Do $QH \parallel AM$ suy ra $\frac{QH}{AM} = \frac{BH}{BA}$ (3). $AM \quad BA$	0,25

Do $CH \parallel ON$, suy ra $\frac{CH}{ON} = \frac{HB}{OB} \Rightarrow \frac{CH}{HB} = \frac{ON}{OB}$ (4).	0,25
$ON = \frac{OB}{2} \Rightarrow \frac{CH}{HB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{CH}{AB} = \frac{1}{2}$	
Từ (3) và (4) ta có $QH = \frac{1}{2} CH$, suy ra Q là trung điểm của CH.	0,25
Lại có K là trung điểm AC. Suy ra QK đi qua trung điểm của CB.	0,25
3. (1,0 điểm) Gọi F là giao điểm của QK và AM, E là giao điểm CD và OM. Chứng minh tứ giác $FEQO$ là hình bình hành. Khi M thay đổi trên Δ, tìm giá trị lớn nhất của $QF + EO$.	
Chứng minh $ADCH$ là hình chữ nhật. Do K là trung điểm AC và Q là trung điểm CH suy ra F là trung điểm AD.	0,25
Ta có $\triangle EKC = \triangle OKA$ (g.c.g) $\Rightarrow KE = KO$ Ta có $\triangle FKA = \triangle QKC$ (g.c.g) $\Rightarrow KF = KQ$. Suy ra $FEQO$ là hình bình hành.	0,25
Ta có $FQ + EO = AH + CB = AH + BH + BA = AH + (AB - AH) = AB$.	0,25
Khi đó $\leq AH + \frac{1}{2} (AB^2 + AB^2 - AB.AH) = \frac{5}{4} AB.$ Dấu bằng xảy ra $AH = \frac{3}{4} AB \Leftrightarrow AM = \frac{3}{4} R$.	0,25

4	
ếm).	
1. (0,75 điểm) Tìm các số nguyên x, y và z thỏa mãn phương trình $x^3 + y^2 - x + 3z = 2021.$	
Xét theo mod 3 ta có $y^2 \equiv \{0;1\}(\text{mod } 3)$ và $2021 \equiv 2(\text{mod } 3)$.	0,25
$x^3 - x = (x - 1)x(x + 1) \equiv 0(\text{mod } 3); 3z \equiv 0(\text{mod } 3).$	0,25
N như vậy về trái chia cho 3 dư 0 hoặc 1 mà về phải chia cho 3 dư 2. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm nguyên.	0,25
2. (0,75 điểm). Cho hình vuông ABCD có độ dài cạnh bằng 1. Bên trong hình vuông người ta lấy tùy ý 2021 điểm phân biệt $A_1, A_2, \dots, A_{2021}$ sao cho 2025	
điểm $A, B, C, D, A_1, \dots, A_{2021}$ không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng từ 2025 điểm trên luôn tồn tại 3 điểm tạo thành hình tam giác có diện tích không quá $\frac{1}{4044}$.	
Ta chứng minh từ 2025 điểm đã cho tạo ra được đúng 4044 tam giác không có điểm trong chung (tức là: mọi điểm Y đã nằm ở miền trong tam giác này thì không nằm ở miền trong tam giác kia)	
Bước 1: từ A, B, C, D và A_1 tạo ra được 4 tam giác không có điểm trong chung. Bước 2: Điểm A_2 sẽ nằm bên trong của một trong 4 tam giác đã có. Không mất tính tổng quát ta giả sử A_2 nằm trong $\triangle ABA_1$, khi đó sẽ tạo ra thêm được 2 tam giác. Như vậy có $4 + 2 = 6$ tam giác không có điểm trong chung. Bước 3: Điểm A_3 sẽ nằm ở một trong 6 tam giác đã có, không mất tính tổng quát, giả sử A_3 nằm trong $\triangle ABA_2$. Khi đó ta có $6 + 2 = 8$ tam giác không có điểm trong chung.	0,25
Sau 2021 bước như vậy thì hình vuông đã cho được chia thành 4044 tam giác không có điểm trong chung.	0,25

liên tích 4044 tam giác đó bằng 1, suy ra tồn tại ít nhất một tam
h không quá $\frac{1}{4044}$.

0,25

4044

Câu V. (1,0 điểm). Cho ba số dương x, y và z thỏa mãn $x + y + z \leq 1$. Chứng

minh rằng $\left(\frac{1}{1-x} \right) \left(\frac{1}{1-y} \right) \left(\frac{1}{1-z} \right) \geq 512$.

$$\left(\frac{x^2}{1-x} \right) \left(\frac{y^2}{1-y} \right) \left(\frac{z^2}{1-z} \right)$$

Ta có

$$(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2) \geq 512x^2y^2z^2$$

0,25

$$\Leftrightarrow (1-x)(1+x)(1-y)(1+y)(1-z)(1+z) \geq 512x^2y^2z^2$$

Do $x + y + z \leq 1$ nên ta có

0,25

$$(1-x)(1-y)(1-z)(1+x)(1+y)(1+z)$$

$$\geq (y+z)(z+x)(x+y)(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z) \quad (1)$$

Chứng minh được: $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz \quad (2).$

0,25

Và:

$$(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)$$

$$\geq 2 \frac{y}{x+z} 2 \frac{y+x}{y+z} 2 \frac{z+x}{x+y} + y$$

$\frac{3(x+y)(y+z)(z+x)}{\geq 8.8xyz} \quad (3).$	
Từ (1), (2) và (3) suy ra điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.	0,25

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NAM



SINH LỚP 10

HUYỀN

1991

2021

Toán

(Đề

chuyên)

Thời gian

làm bài:

150 phút

Câu 1 (2,0 điểm).

Cho biểu thức

$$P = \frac{(x+3)(x+2)(x+1)}{\sqrt{x}} : \left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}} \right) \text{ với } x > 0; x \neq 1.$$

$\sqrt{}$

$$\frac{(x+3)(x+2)(x+1)}{\sqrt{x}} : \left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}} \right)$$

1. Rút gọn biểu thức P .

2. Tìm x để $\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} \geq 1$.

$P = 8$

Câu 2 (2,0 điểm).

1. Cho phương trình

$$x^4 - 2mx^2 + 2m + 6 = 0. \text{ Tìm giá trị của } m \text{ để phương}$$

trình có

bốn nghiệm phân biệt

x_1, x_2, x_3, x_4

sao cho

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$$

và

1 2 3 4

1 2 3 4

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x = 0.$$

4 3 2 1

2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} xy^2 + 4y^2 + 8 = x(x+2) \\ x + y + 3 = 3 \end{cases}$$

Câu 3 (4,0 điểm).

{

$$\begin{cases} x + y + 3 = 3 \end{cases}$$

Cho tam giác nhọn

ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , có đường

cao AH .

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC . Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai M . Gọi A' là điểm đối xứng với A qua O . MA' cắt các Đường thẳng

đường thẳng AH, BC theo thứ tự tại N và K . Gọi L là giao điểm của MA và BC . Đường thẳng $A'I$ cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D . Hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại điểm S . ANA' là tam giác cân và $MA'.MK = ML.MA$.

1. Chứng minh tam giác

2. Chứng minh

$MI^2 = ML.MA$ và tứ giác $NHIK$ là tứ giác nội tiếp.

3. Gọi T là trung điểm của cạnh SA , chứng minh ba điểm T, I, K thẳng hàng.

4. Chứng minh nếu $AB + AC = 2BC$ thì I là trọng tâm của tam giác AKS .

Câu 4 (1,0 điểm).

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $2^x - y^2 + 4y + 61 = 0$.

Câu 5 (1,0 điểm).

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 8$. Chứng minh :

$$\frac{a}{ca+4} + \frac{b}{ab+4} + \frac{c}{bc+4} \leq \frac{1}{16} (a^2 + b^2 + c^2).$$

$$\frac{ca+4}{ab+4} + \frac{ab+4}{bc+4} + \frac{bc+4}{ca+4} \leq \frac{16}{1}$$

---HẾT---

Họ và tên thí sinh.....Số báo danh.....

Cán bộ coi thi thứ 1.....Cán bộ coi thi thứ 2.....

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NAM



SINH LỚP 10

UYÊN

991

021

oán

(Đề

chuyên)

Thời gian

làm bài:

150 phút

√

√

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN CHUYÊN

√

√

√

(Hướng dẫn chấm thi có 5 trang)

Lưu ý: - Điểm làm tròn đến 0,25.

- Học sinh nếu dùng định lý Menelaus mà không chứng minh thì trừ 0,25 điểm/bài.

- Các cách giải khác mà đúng cho điểm tương đương.

√

√

√

√

√

√

√

√

√

√

√

Nội dung

Điểm

Câu 1 (2,0 điểm).

Cho biểu thức $P = \left(x + \frac{3}{x} + \frac{\sqrt{2}}{x} + \frac{1}{x} \right) \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} \right)$ với $x > 0; x \neq 1$.

√

√

√

√

√

√

√

√

√

√

√

√

√

√

√

√

√

√

√

√

1.(1,0 điểm) Rút gọn biểu thức P

$$\left[\frac{(x+1)(x+2)}{x(x+1)} - \frac{x-1}{x+1} \right]$$

0,25

$$P = \left[\frac{(x+2)(x-1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{x-1}{x+1} \right]$$

$$\left[\frac{(x+2)(x-1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{x-1}{x+1} \right]$$

$= \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x}{x-1} \right) : \frac{2x}{(x+1)(x-1)}$	0,25
$\frac{1}{x-1} \frac{(x+1)(x-1)}{2x}$ $= \frac{1}{x-1} \cdot \frac{2x}{2x}$	0,25
$= \frac{x+1}{2x}$	0,25
2.(1,0 điểm) Tìm x để $\frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x-1} \geq 1$	
$\frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1 - (x+1)}{x-1} \geq 1$	0,25
$\Leftrightarrow \frac{1 - x - 1}{x-1} \geq 1$	0,25
$\Leftrightarrow \frac{-x}{x-1} \geq 1$	0,25
$\Leftrightarrow -x \geq x-1 \quad (\text{vì } x-1 > 0 \text{ với mọi } x > 0; x \neq 1)$	0,25
$\Leftrightarrow -x - x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (-2x + 1) \leq 0 \Leftrightarrow -2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ Vậy x = 1/2 thỏa mãn điều kiện.	0,25

(m) Cho phương trình $x^4 - 2mx^2 + 2m + 6 = 0$. Tìm giá trị của m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt $x_1; x_2; x_3; x_4$ sao cho: $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ và $x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 - x_4^2 = 0$.	
Phương trình $x^4 - 2mx^2 + 2m + 6 = 0$. (1) Đặt $t = x^2 (t \geq 0)$, ta có: $t^2 - 2mt + 2m + 6 = 0$ (2) Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt $t_1, t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P = 2m + 6 > 0 \\ S = 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 6 > 0 \\ m > 0 \end{cases}$ (3)	0,25
Với điều kiện (3), phương trình (2) có 2 nghiệm dương $0 < t_1 < t_2$ $\Rightarrow$ phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt: $x_1 = -\sqrt{t_1} < x_2 = -\sqrt{t_2} < x_3 = \sqrt{t_1} < x_4 = \sqrt{t_2}$ Theo đề bài ta có $x_1^4 - 2x_2^4 + 2x_3^4 - x_4^4 = 0 \Leftrightarrow x_1^4 - x_2^4 = 2(x_3^4 - x_4^4)$ $\Leftrightarrow t_1^2 - t_2^2 = 2(t_1^2 - t_2^2) \Leftrightarrow t_1^2 = 2t_2^2 \Leftrightarrow t_1 = 2t_2$ (4).	0,25
Theo định lý Vi-ét, ta có: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 2m \\ t_1 t_2 = 2m + 6 \end{cases}$ (5)	0,25

$$\text{có: } 5t = 2m \text{ và } 4t^2 = 2m + 6 \Rightarrow 16m^2 - 50m - 150 = 0$$

$$\begin{cases} 15 \end{cases}$$

0,25

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 5 \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện suy ra với $m = 5$ thì phương trình (1) có 4 nghiệm thỏa mãn điều kiện bài toán.

$$\sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \quad \begin{cases} xy^2 + 4y^2 + 8 = x(x + 2) \end{cases} (1)$$

Câu 2.2 (1,0 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}$

$$\sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \quad \begin{cases} x + y + 3 = 3 \quad 2y - 1 \end{cases} (2)$$

Điều kiện: $2y - 1 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq \frac{1}{2}$.

0,5

2

$$\begin{cases} x = -4 \end{cases}$$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow (x + 4)(y^2 - x + 2) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = y^2 + 2 \end{cases}$$

Thế $x = -4$ vào phương trình thứ 2 ta được

$$\sqrt{\quad}$$

0,25

$$\begin{cases} y \geq 1 \end{cases}$$

$$y - 1 = 3 \quad 2y - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \end{cases} \Leftrightarrow y = 10 + 3 \quad 10$$

$$\begin{cases} (y - 1)^2 = 9(2y - 1) \end{cases}$$

Với $x = y^2 + 2$, thay vào (2) ta được: $y^2 + y + 5 = 3 \quad 2y - 1$ (3)

0,25

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

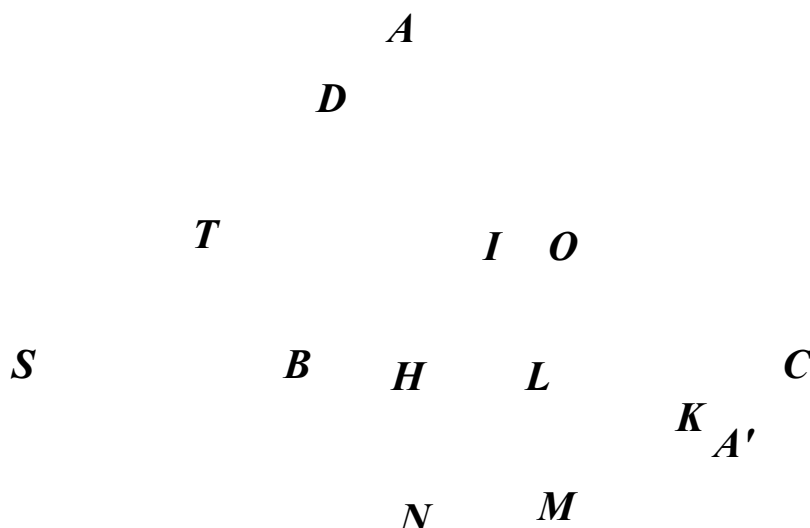
$$y^2 + y + 5 = y^2 \quad y \quad y \quad y \quad \sqrt{\quad} \quad y - 1 \quad y - 1$$

Do đó phương trình (3) vô nghiệm

$$\sqrt{\quad}$$

$$\sqrt{\quad}$$

Cho tam giác nhọn ABC không cân nội tiếp đường tròn (O) , có tâm đường tròn nội tiếp là I . Đường thẳng AI cắt lại đường tròn (O) tại điểm thứ hai M . Gọi A' là điểm đối xứng với A qua O . Đường thẳng MA' cắt các đường thẳng AH, BC theo thứ tự tại N và K . Gọi L là giao điểm của MA và BC . Đường thẳng $A'I$ cắt lại đường tròn (O) tại điểm thứ hai D , hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại điểm S .



1.(1,0 điểm) Chứng minh rằng tam giác ANA' là tam giác cân và $MA'.MK = ML.MA$.

Ta có $\angle A'AC = 90^\circ - \angle AA'C = 90^\circ - \angle ABC = \angle BAH$ mà AI là phân giác của góc $\angle BAC$ nên AI là phân giác góc $\angle NAA'$.

0,25

$AM \perp MA' \Rightarrow$ tam giác ANA' cân tại A .

0,25

$$\angle HKN = 90^\circ - \angle HNK = \angle HAM = \angle AA'$$

0,25

$$\triangle MAA' \sim \triangle MKL (g.g) \Rightarrow MA'.MK = ML.MA$$

0,25

2. (1,0 điểm) Chứng minh rằng $MI^2 = ML.MA$ và tứ giác $NHIK$ là tứ giác nội tiếp.

$$\angle MIC = \angle MAC + \angle CI = \angle CB + \angle CI = \angle CI \Rightarrow MI = MC$$

0,25

$$(g.g) \Rightarrow ML.MA = MC^2 \Rightarrow ML.MA = MP^2.$$

0,25

$$ML.MA = MP^2 \Rightarrow \Delta IMN \sim \Delta KIN(g.g) \Rightarrow \angle IK = 90^\circ$$

0,25

$\angle IK = \angle HK = 90^\circ$. Vậy tứ giác $NHIK$ nội tiếp.

0,25

3. (1,0 điểm) Gọi T là trung điểm của cạnh SA . Chứng minh rằng ba điểm T, I, K thẳng hàng

Tứ giác $NHIK$ nội tiếp suy ra $\angle HK = \angle NK = \angle A'M = \angle AD$.

0,25

Suy ra tứ giác AHS nội tiếp. Do đó $\angle AIS = \angle AHS = 90^\circ$.

0,25

$$\angle IA = \angle AI = \angle NK$$

0,25

$\Rightarrow \angle IA = \angle IK$, suy ra ba điểm T, I, K thẳng hàng

0,25

4. (1,0 điểm) Chứng minh rằng nếu $AB + AC = 2BC$ thì I là trọng tâm của tam giác AKS .

$$\text{Ta có } \frac{AI}{IL} = \frac{AB}{BL} = \frac{AC}{CL} = \frac{AB + AC}{BL + CL} = \frac{2BC}{BC} = 2$$

0,5

$$\frac{AI}{IL} = \frac{AB}{BL} = \frac{AC}{CL} = \frac{AB + AC}{BL + CL} = \frac{2BC}{BC} = 2$$

A

T

E

I

S

L

K

$$\text{Kẻ } LE \perp SA (E \in TK). \text{ Ta có } \frac{LE}{IL} = \frac{IL}{LE} = 1 \Rightarrow \frac{LE}{IL} = 1$$

0,25

$AT \quad IA \quad 2 \quad ST \quad 2$	
điểm của SK mà $\frac{AI}{IL} = 2$ nên I là trọng tâm của tam giác ASK.	0,25
Câu 4 (1,0 điểm). Tìm cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn: $2^x - y^2 + 4y + 61 = 0 \quad (1).$	
Ta có $(1) \Leftrightarrow 2^x + 65 = (y - 2)_2$.	0,25
Vì 65 chia hết cho 5 và 2^x không chia hết cho 5 với mọi x nguyên dương nên nếu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn phương trình (1) thì $y - 2$ là số nguyên không chia hết cho 5. Suy ra $(y - 2)^2 \equiv \pm 1 \pmod{5}$. Do đó $2^x \equiv \pm 1 \pmod{5}$, suy ra $x = 2k$, với k là số nguyên dương.	0,25
Thay vào phương trình (1) ta được: $2^{2k} + 65 = (y - 2)_2 \Leftrightarrow 65 = (y - 2 + 2^k) \cdot (y - 2 - 2^k) \quad (2)$	0,25
Vì $k; y$ nguyên dương nên $y - 2 + 2^k > 0$, từ (2) suy ra $y - 2 - 2^k > 0$ và $y - 2 + 2^k > y - 2 - 2^k$. Do đó $\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} y - 2 + 2^k = 65 \\ y - 2 - 2^k = 1 \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} k = 5 \\ y = 35 \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 10 \\ y = 35 \end{array} \right. \end{array}$	0,25

$$\begin{cases} | \\ | \end{cases} \quad k \quad \Leftrightarrow \begin{cases} | \\ | \end{cases} \quad k = 2 \Rightarrow \begin{cases} | \\ | \end{cases} \quad x = 4$$

$$\begin{cases} | \\ | \end{cases} \quad y - 2 + 2 = 13 \quad | \quad | \\ | \\ | \\ | \end{cases} \quad y - 2 - 2^k = 5 \quad | \quad | \quad y = 11 \quad | \quad | \quad y = 11$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên dương là $(10; 35)$ và $(4; 11)$

Câu 5 (1,0 điểm). Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 8$. Chứng

minh rằng $\frac{a}{ca+4} + \frac{b}{ab+4} + \frac{c}{bc+4} \leq \frac{1}{16} (a^2 + b^2 + c^2)$. (1)

$$ca+4 \quad ab+4 \quad bc+4 \quad 16$$

Vì a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 8$ nên tồn tại các số thực dương

0,25

x, y, z sao cho $a = \frac{2x}{y}$; $b = \frac{2y}{z}$; $c = \frac{2z}{x}$.

Bất đẳng thức trở thành $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{2x}{y+z} + \frac{2y}{z+x} + \frac{2z}{x+y}$

$$\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \right) \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right)^2 \geq \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right)^3$$

0,25

$$3 \left| \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \right| \geq \left| \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right| \geq 3 \left| \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right| \quad (2)$$

$$\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} \right) \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} \right) \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y^2} + \frac{y}{z^2} + \frac{z}{x^2} \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$$

$\frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} + \frac{x^2}{z} \geq \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} \quad (3)$ Từ (2) và (3) có $\left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \right) \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ $2 \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} \right) \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}$ $\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} \right) \geq \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}$	0,25
Lại có $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = x \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + y \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x} \right) + z \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$ $\geq \frac{4x}{y} + \frac{4y}{z} + \frac{4z}{x}$ Ta có bất đẳng thức (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2.$	0,25

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NAM



SINH LỚP 10
HUYỀN

1991
2020

Toán

(Đề
chuyên)
Thời gian
làm bài:
150 phút

Câu 1 (2,0 điểm). Cho biểu
thức:

$$x \geq 0,$$

$$x \neq 4, x \neq 9).$$

$$A = \frac{x+24}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} + \sqrt{x-5} + 6} + \frac{x+3}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} + \sqrt{x-5} + 6} + \frac{x+2}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} + \sqrt{x-5} + 6} + \frac{x+1}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} + \sqrt{x-5} + 6}$$

(với

√

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} + \sqrt{x-5} + 6$$

1. Rút gọn biểu
thức A.

2. Tìm x để biểu thức A đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 2 (2,0 điểm).

có phương trình

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy,
cho đường thẳng (d)

$$y = 4mx - 3m^2 - 2m + 3$$

và parabol (P)

có phương trình

$$y = x^2. \text{ Tìm tất cả các giá trị nguyên}$$

của m để (d) cắt (P)

tại hai điểm phân biệt có hoành độ

x_1, x_2 sao cho

$$P = \frac{4x_1 x_2 - 2m}{x_1 + x_2 + 2}$$

1 2

$$x + x + 2$$

giá trị nguyên.

Câu 3 (4,0 điểm).

$$\begin{cases} xy^2 + 4y^2 + 8 = x(x + 2) \\ \end{cases}$$

$$\{$$

$$\begin{cases} x + y + 3 = 3 \end{cases}$$

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) ($AB < AC$), điểm M là trung điểm của cạnh BC . Đường phân giác trong $\widehat{BAC}$ cắt cạnh BC tại D và cắt đường tròn (O) tại

điểm P (P khác A). Gọi E là điểm đối xứng với D qua M . Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt đường thẳng AO tại H . Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt đường thẳng AD tại F . Gọi K là giao điểm của PE và DH .

1. Chứng minh tứ giác $DEFK$ là hình chữ nhật.

2. Chứng minh
(I).

$DB \cdot DC = DA \cdot DP = DH \cdot DK$, từ đó suy ra tứ giác $BHCK$ nội tiếp đường tròn

3. Gọi T là giao điểm của AD và (I)
góc với đường thẳng AD .

(T khác F). Chứng minh đường thẳng HT vuông

4. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MTP cắt đường thẳng TH tại điểm Q (Q khác T). Chứng minh đường thẳng QA tiếp xúc với đường tròn (O) .

Câu 4 (1,0 điểm). Tìm tất cả các số tự nhiên n là số chính phương.

sao cho $7^n + 147$

Câu 5 (1,0 điểm).

Cho a, b, c . Chứng minh

các
số
thực
dương

---HẾT---

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{\sqrt{c}} + \frac{c}{a}$$

$$a + b + c \geq 4.$$

Họ và tên thí sinh.....Số báo danh.....
Cán bộ coi thi thứ 1.....Cán bộ coi thi thứ 2.....

Câu 1 (2,0 điểm).

1. Rút gọn biểu thức A .

$$A = \frac{(x+3)(x-3) - (x+2)(x-2) + 2}{(x-2)(x-3)}$$

$$A = \frac{(x+3)(x-3) - (x+2)(x-2) + 2}{(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{x^2 + 24}{(x-2)(x-3)}$$

$$A = \frac{x^2 + 24}{(x-2)(x-3)}$$

$$A = \frac{x^2 + 24}{(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sqrt{x+24} - 2 \right) \left(\sqrt{x+24} + 3 \right)$$

✓

$$A = x + 24$$

✓

✓

2) Tìm x để A đạt giá trị nhỏ nhất.

$$M = x + 24 = x - 1 + 25 = \left(x - 1 \right)^2 + 1 + 25 - 2$$

$$= \left(x - 1 \right)^2 + 24$$

$$25$$

✓

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số ta có

$$\left(x - 1 \right)^2 + 25 \geq 10 \left(x - 1 \right)$$

✓

Do đó $M \geq 8$.

✓

Đẳng thức xảy ra khi $\left(x - 1 \right)^2 + 25 = 10 \left(x - 1 \right) \Leftrightarrow x^2 - 12x + 26 = 0 \Leftrightarrow x = 16$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M bằng 8, đạt được khi x=16.

Câu 2 (2,0 điểm).

1. Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$x^2 = 4mx - 3m^2 - 2m + 3 \Leftrightarrow x^2 - 4mx + 3m^2 + 2m - 3 = 0$$

$$\Delta' = m^2 - 2m + 3 = (m - 1)^2 + 2 > 0 \forall m$$

Suy ra (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.

Theo định lý Viet, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4m \\ x_1 x_2 = 3m^2 + 2m - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4m \\ x_1 x_2 = 3m^2 + 2m - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4m \\ x_1 x_2 = 3m^2 + 2m - 3 \end{cases}$$

$$4x_1 x_2 - 2m = 4(3m^2 + 2m - 3) - 2m$$

$$P = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2 + 2} =$$

$$\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2 + 2} = \frac{3m^2 + 2m - 3}{4m + 2}$$

$$= \frac{12m^2 + 6m - 12}{4m + 2} = \frac{6m^2 + 3m - 6}{2m + 1}$$

$$P = 3m -$$

$$\frac{6}{2m + 1}$$

$$P \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (2m + 1) \mid 6$$

$$\text{Mà } 2m+1 \text{ là số lẻ} \Rightarrow (2m + 1) \in \{\pm 1; \pm 3\}$$

$$2m + 1 = 1 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow P = -6$$

$$2m + 1 = -1 \Rightarrow m = -1 \Rightarrow P = 3$$

$$2m + 1 = 3 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow P = 1$$

$$n = -2 \Rightarrow P = -4$$

$$\text{Vậy } m \in \{0; -1; 1; -2\}.$$

$$\begin{cases} xy^2 + 4y^2 + 8 = x(x+2) & (1) \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \sqrt{x+y+3} = 3\sqrt{2y-1} & (2) \end{cases}$$

$$\text{Điều kiện: } y \geq \frac{1}{2}$$

2

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow (x+4)(y^2-x+2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y^2-x+2=0 \end{cases}$$

$\sqrt{\quad}$

|

$$\text{Thế } x = -4 \text{ vào (2) ta được } \begin{cases} y \geq \frac{1}{2} \\ (y-1)^2 = 9(2y-1) \end{cases} \Leftrightarrow y = 10 + 3\sqrt{11}$$

$$1 \quad \begin{cases} (y-1)^2 = 9(2y-1) \end{cases} \quad \square$$

3

Với $x = y^2 + 2$, thay vào phương trình (2) ta được:

$$y^2 + y + 5 = 3\sqrt{2y-1} \quad (3)$$

$$y^2 + y + 5 = (y^2 - y + 1) + (2y - 1) + 5 > (2y - 1) + 5$$

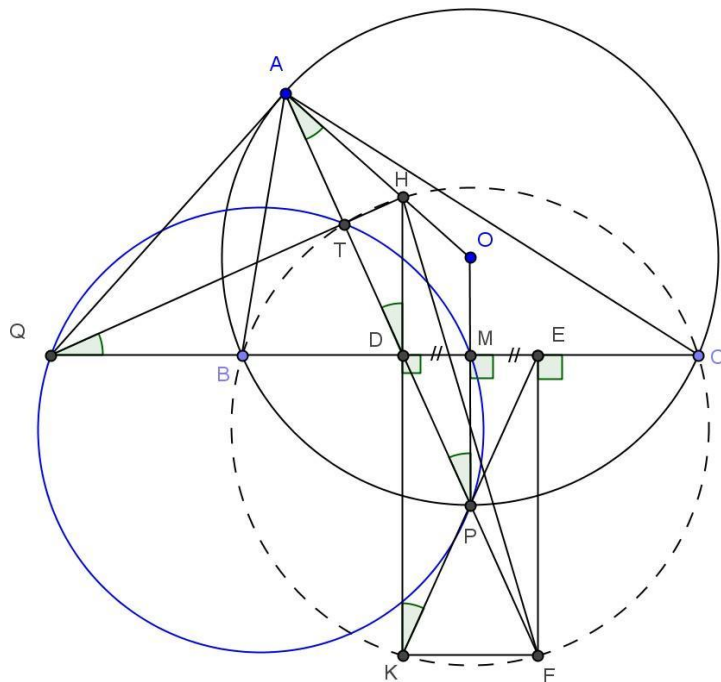
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$(2y - 1) + 5 \geq 2\sqrt{(2y-1) \cdot 9} > 3\sqrt{2y-1}$$

Do đó phương trình (3) vô nghiệm

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(-4; 10 + 3)$

Câu 3 (4,0 điểm).



1. Chứng minh tứ giác $DEFK$ là hình chữ nhật.

$DK \parallel EF$ (cùng vuông góc với BC).

h chất đường trung bình)

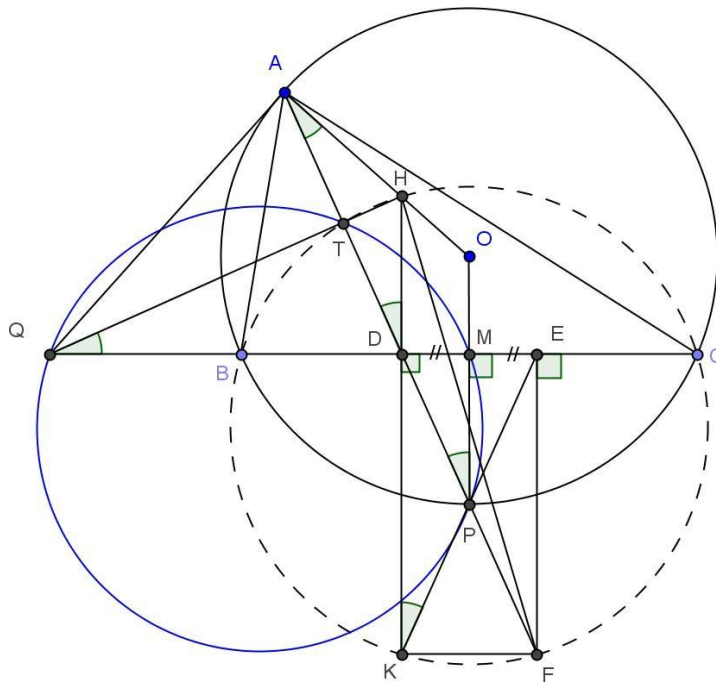
chất đường trung bình)

Suy ra DEFK là hình bình hành

Mà $\angle EDK = 90^\circ$ do đó DEFK là hình chữ nhật.

2. Chứng minh
(I).

$DB \cdot DC = DA \cdot DP = DH \cdot DK$, từ đó suy ra tứ giác BHCK
nội tiếp đường tròn



$\triangle DAB$ đồng dạng với tam giác $\triangle DCP$ (g.g) $DA \cdot DP = DB \cdot DC$ (1).

Chỉ ra được $\angle AP = \angle PD = \angle PE = \angle KP$, suy ra tứ giác AHPK nội tiếp

$\triangle DAH$ đồng dạng với tam giác $\triangle DKP$ (g.g) do đó $DA \cdot DP = DH \cdot DK$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $DB \cdot DC = DH \cdot DK$

$\triangle DBH$ đồng dạng với tam giác $\triangle DKC$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle BDH = \angle C KD$

$\Rightarrow$ tứ giác BHCK nội tiếp.

3. Gọi T là giao điểm của AD và (I)
góc với đường thẳng AD.

(T khác F). Chứng minh đường thẳng HT vuông

Vậy

+ Tứ giác BHCK nội tiếp.

$$\angle BHC + \angle BKC = 180^\circ$$

(3)

+ Chỉ ra được K và F đối xứng nhau qua trung trực MP của đoạn BC , do đó
(4).

Từ (3) và (4) có

$\widehat{BHC} + \widehat{BFC} = 180^\circ$, do đó bốn
điểm

B, H, C, F cùng nằm trên đường
tròn

(I).

$\widehat{HKF} = 90^\circ$, suy ra HF là đường kính của (I), $HT \perp AD$.
suy ra

ngoại tiếp tam giác MTP cắt đường thẳng TH tại điểm Q (Q khác T). Chứng minh QA tiếp xúc với đường tròn (O) .

+ $\widehat{HAD} = \widehat{OPD} = \widehat{HDA}$, suy ra tam giác A, D đối xứng nhau qua HT .

HDA cân tại H nên

Kéo dài TH cắt đường thẳng BC tại Q' thì $\widehat{Q'AH} = \widehat{Q'DH} = 90^\circ$, suy ra $Q'A$ là tiếp tuyến của (O) .

+ Chỉ ra được $\widehat{HQ'D} = \widehat{TDH} = \widehat{TPM}$ nên tứ giác $TQ'PM$ nội tiếp

từ đó suy ra $Q' \equiv Q$. Vậy QA tiếp xúc với đường tròn (O) .

Câu 4 (1,0 điểm).

Dễ thấy $n = 0$ thì $7^n + 147 = 148$ không là số chính phương.

Xét $n > 0$ Nếu n lẻ, đặt $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$).

Ta có $7^{2k+1} \equiv (-1)^{2k+1} \pmod{4} \equiv -1 \pmod{4}$, $147 \equiv 3 \pmod{4}$
 $\Rightarrow 7^{2k+1} + 147 \equiv 2 \pmod{4}$ không là

Mà một số chính phương hoặc chia hết cho 4 hoặc chia cho 4 dư 1, suy ra $7^n + 147$ số chính phương.

Nếu n chẵn, đặt $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

Giả sử tồn tại số nguyên a thì
sao cho $7^n + 147 = a^2$

$a \vdots 7$, đặt $a = 7m$ ($m \in \mathbb{N}^*$). Khi đó

$$7^n + 147 = a^2 \Leftrightarrow 7^{2k} + 147 = 49m^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 7^{2k-2} = 3 \Leftrightarrow (m - 7^{k-1})$$

$$)(m + 7^{k-1}) = 3$$

$$\begin{cases} m - 7^{k-1} = 1 \\ m + 7^{k-1} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ k = 1 \end{cases} \Rightarrow n = 2$$

Với $n = 2$,
 $7^2 + 147 = 196 = 14^2$.
 Vậy khi $n = 2$ thì $7^n + 147$ là số chính phương.

Câu 5 (1,0 điểm).

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \quad (\text{bất đẳng thức B.C.S})$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \\ &= \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + \frac{3(ab+bc+ca)}{ab+bc+ca} - \frac{3(ab+bc+ca)}{ab+bc+ca} \\ &= \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + \frac{3(ab+bc+ca)}{ab+bc+ca} - \frac{3(ab+bc+ca)}{ab+bc+ca} \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$(ab + bc + ca)^2 (a^2 + b^2 + c^2) (a + b + c)^6$$

)

$$[2 (ab + bc + ca) + a^2 + b^2$$

$$+ c^2]_3$$

$$\leq$$

$$| =$$

$$||$$

$$|$$

$$27$$

$$3 (a + b + c)$$

$$\sqrt{}$$

$$+ c)^3$$

$$ab + bc + ca$$

$$\sqrt{}$$

$$\geq 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \sqrt{}$$

$$(ab + bc + ca)$$

$$a^2 + b^2 + c^2$$

$$\sqrt{}$$

$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a + b + c)^2} \leq 1$$

$$\Rightarrow S \geq 6 - 2 = 4.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NAM

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm 01 trang

LỚP 10

YÊN

18 – 2019

HUYÊN

Thời gian làm bài: 150 phút

(Không kể thời
gian giao đề)

Câu 1. Cho biểu thức $Q = \left(\frac{\sqrt{1+a}}{1-a} + \frac{1}{1-a} \right) \cdot \frac{1}{1-a}$

$(0 < a < 1)$

$\frac{a^2 - 2a}{a^2 - 1}$

$\left| \frac{a^2 - 1}{a^2 - 1} - \frac{1}{a^2 - 1} \right| = \frac{1}{a^2 - 1} \parallel a \parallel$

1) Rút gọn Q

2) So sánh Q, Q_3

Câu 2.

1) Giải phương trình: $\left(\frac{1}{x^2} - 1 + a \right) \parallel a \parallel$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $(P): y = x^2$ và $(d): y = m, (d'): y = m^2 (0 < m < 1)$.

Đường d cắt P tại hai điểm phân biệt A, B , đường d' cắt P tại hai điểm phân biệt C, D

(hoành độ A và D âm). Tìm m sao cho diện tích tứ giác ABCD gấp 9 lần diện tích tam giác OCD.

Câu 3. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn
đương

$$7^x = 3 \cdot 2^y + 1$$

Câu 4. Cho đường tròn (O) và đường thẳng d cố định (d và (O) không có điểm chung). Lấy M là điểm di động trên đường thẳng d. Vẽ hai tiếp tuyến MA và MB phân biệt và cát tuyến MCD với (O) sao cho C nằm giữa M và D, CD không đi qua tâm O. Vẽ dây cung DN song song với AB. Gọi I là giao điểm của CN và AB. Chứng minh rằng :

$$1) \quad \frac{IC}{IA} = \frac{BC}{BD}$$

$$\text{và } IA = IB$$

2) Điểm I luôn thuộc một đường cố định khi M di chuyển trên đường thẳng d

Câu 5. Một học sinh tùy ý chấm 6 điểm phân biệt vào trong hình tròn có bán kính 1. Chứng minh rằng luôn tồn tại 2 điểm A, B trong 6 điểm đã cho sao cho $AB \leq 1$

Câu 6. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn
đương

$$xy + yz + xz \geq x + y + z$$

Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2} \geq 1$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu	ý	Nội dung	Điểm
Câu 1 (2,0đ)	1. (1,0đ)	Với $0 < a < 1$, ta có: $Q = \left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}} + \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{2\sqrt{1-a^2}}{a} \right)$ $= \left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}} + \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{2\sqrt{1-a^2}}{a} \right)$ $= \left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}} + \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{2\sqrt{1-a^2}}{a} \right)$	0,5
		$= \left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}} + \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{2\sqrt{1-a^2}}{a} \right)$ $= \left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}} + \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{2\sqrt{1-a^2}}{a} \right)$	0,5
		$= \left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}} + \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{2\sqrt{1-a^2}}{a} \right)$ $= \left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}} + \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{2\sqrt{1-a^2}}{a} \right)$	0,5
	2. (1,0đ)	$= \left(\frac{1+a}{1+a-\sqrt{1-a}} + \frac{1-a}{1+a-\sqrt{1-a}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{2\sqrt{1-a^2}}{a} \right)$ $= \frac{1+a+\sqrt{1-a}}{1+a-\sqrt{1-a}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{2\sqrt{1-a^2}}{a} \right)$	0,25 0,25

		$-\left(1+a-1-a\right)^2$ $= \frac{1+a+1-a}{1+a-1-a} \cdot \frac{(1-a)}{2a}$ $\frac{(1+a+1-a)(1+a-1-a)}{2a}$ $= - \frac{(1-a)}{2a}$ $= - \frac{\left(1+\frac{a}{2}\right) - \left(1-\frac{a}{2}\right)}{2a} (1-a) = - \frac{2a}{2a} (1-a) = a-1.$ $\frac{2a}{2a}$ Do $1 > a > 0 \Rightarrow 0 > a-1 > -1 \Rightarrow 1 > (a-1)^2 > 0$. Xét $Q^3 - Q = (a-1)((a-1)^2 - 1) > 0$. Vậy $Q^3 > Q$.	
Câu 2 (2,0đ)	1. (1,0đ)	Đk: $\begin{cases} x+9 \geq 0 \\ 9-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -9 \leq x \leq 9.$ Với đk trên, pt đã cho tương đương với $x \left(9-x+3 \right) = 2x \left(x+9+3 \right)$ $\begin{cases} x=0 \\ \Leftrightarrow \end{cases}$	0,25 0,25 0,25

$$\sqrt{9-x} = 2\sqrt{x+9} + 3 \quad (*)$$

Đặt $a = \sqrt{9-x}$, $b = \sqrt{x+9}$ ta có $a, b \geq 0$. Từ (*), ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a = 2b + 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} a^2 + b = 18 \end{cases} \quad (2)$$

$$a^2 = 2$$

Thay (1) vào (2) suy ra $(2b + 3)^2 + b = 18 \Leftrightarrow b = 3/5$

$$\begin{cases} b = -3 \end{cases}$$

l

0,25

Với $b = -3$ loại.

$$\text{Với } b = 3 \Rightarrow x = -216$$

$$5 \quad 25$$

Thử lại, phương trình có tập nghiệm $S = \{-216; 0\}$.

$$\begin{cases} 25 \\ \end{cases}$$

2.
(1,0đ)

Tính được $A(-m; m), B(m; m), C(m; m^2), D(-m; m^2)$

0,25

0,25

0,25

Tính được $S_{\Delta OCD} = m; S_{ABCD} = (m - m)(m + m)$.(do $1 > m > 0$)

0,25

$$\text{Do } S = 9.S \Leftrightarrow (m - m^2)(m + m) = 9m^3$$

$$ABCD \quad \Delta OCD$$

$$\Leftrightarrow 10m^2 + m - m - 1 = 0$$

Đặt

$$m = t > 0 \Rightarrow 10t^3 + t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(10t^2 + 6t + 2) = 0 \Leftrightarrow t$$

=

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Suy ra $m = \frac{1}{4}$. Kết luận, $m = \frac{1}{4}$ là giá trị cần tìm.

4

4

Câu 3
(1,0đ)

TH1: nếu $x = 2k + 1 (k \in \mathbb{N}, k \geq 0)$, ta có pt: $7^{2k+1} = 3 \cdot 2^y + 1$.

0,25

+) Nếu $k = 0$ suy ra $x = 1, y = 1$ là nghiệm cần tìm.

+) Nếu $k \geq 1$ suy ra $3 \cdot 2^y + 1 \geq 7^3 \Rightarrow y \geq 2 \Rightarrow 2^y \equiv 0 \pmod{4}$.

0,25

Xét $\pmod{4}$ cả hai vế thì có:

$$7^{2k+1} = 49^k \cdot 7 \equiv 3 \pmod{4}.$$

$3.2^y + 1 \equiv 1 \pmod{4}$. Suy ra pt vô nghiệm.

0,25

TH2: $x = 2k$ (với $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$) khi đó

$$7^{2k} = 3.2^y + 1 \Leftrightarrow 7^{2k} - 1 = 3.2^y \Leftrightarrow (7^k - 1)(7^k + 1) = 3.2^y \quad (1).$$

Do $7^k - 1 \equiv 0 \pmod{3}$ kết hợp với (1) suy ra $7^k + 1 = 2^m$ ($m \in \mathbb{N}$)

$$\sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad}$$

+

$$\text{Vậy } (1) \Leftrightarrow (2^m - 2)2^m = 3.2^y \Leftrightarrow (2^{m-1} - 1)2^{m+1} = 3.2^y$$

$$\sqrt{\quad}$$

Do $2^{m-1} - 1$ lẻ và $2^{m+1} \vdots 3$ suy ra $\sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad}$

$$\sqrt{2^{m-1} - 1} = 3 \quad \{m = 3 \quad \{x = 2$$

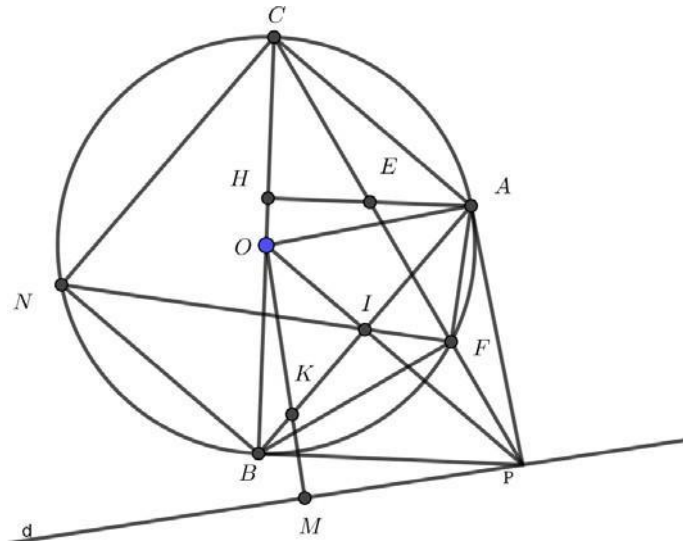
$$\Rightarrow \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{2^{m+1}} = 2^y \quad \{y = 4 \quad \{y = 4$$

Thử lại, suy ra có hai cặp nghiệm $(1; 1), (2; 4)$ thỏa mãn yêu cầu.

(có thể không cần trình bày theo ngôn ngữ mod)

0,25



(không có vẽ hình học sinh không được chấm bài)

Do $HA \parallel PB$ (Cũng vuông góc với BC)

nên theo Định lý Talet, đồng cho $\triangle CBP$, ta có: $\frac{EH}{PB} = \frac{CH}{CB}$ (1)

$$\frac{EH}{PB} = \frac{CH}{CB}$$

Câu 4
(4,0đ)

1.
(1,0đ)

Mặt khác, do $PO \parallel AC$ (cũng vuông góc với AB)

$\Rightarrow \angle POB = \angle ACB$ (hai góc bằng v.p)

$\Rightarrow \triangle AHC$ đồng dạng $\triangle PBO$ Do đó: $\frac{AH}{PB} = \frac{CH}{OB}$ (2)

$$\frac{AH}{PB} = \frac{CH}{OB}$$

Do $CB = 2OB$, kết hợp (1) và (2) ta suy ra $AH = 2EH$ hay E là trung điểm của AH .

Ta có $\angle IBF = \angle FCA$; $\angle BFI = \angle CFA$ suy ra $\triangle BIF$ đồng dạng $\triangle CAF$

Suy ra $\frac{IF}{IB} = \frac{AF}{AC}$ (1)

$$\frac{IF}{IB} = \frac{AF}{AC}$$

2.
(1,0đ)

0,25

0,25

0,25

0,25

0,25

0,25

Tương tự, ta có $\frac{IF}{IA} = \frac{BF}{BC}$. (2)

$$\frac{IA}{BC}$$

Chúng minh được: ΔPFA đồng dạng ΔPAC suy ra $\frac{AF}{AC} = \frac{AP}{PC}$. (3)

$$\frac{AC}{PC}$$

Tương tự: ΔPBF đồng dạng ΔPCB suy ra $\frac{BF}{BC} = \frac{PB}{PC}$. (4)

$$\frac{BC}{PC}$$

Từ (1), (2), (3), (4) và $PA = PB$ suy ra $IA = IB$.

Gọi M là chân đường vuông góc hạ từ O lên đường thẳng d . Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng OM và AB .

Ta có P, I, O thẳng hàng và $OI \perp AB$.

Chúng minh: ΔOIK đồng dạng ΔOMP

$$\Rightarrow \frac{OK}{OP} = \frac{OI}{OM} \Leftrightarrow OK = \frac{OP \cdot OI}{OM}$$

Mặt khác $OP \cdot OI = \frac{OB^2}{OM}$ suy ra $OK = \frac{OB^2}{OM}$ cố định, suy ra điểm K cố định

Vậy I thuộc đường tròn đường kính OK .

Gọi 6 điểm là A, B, C, D, E, F và tâm hình tròn là O .

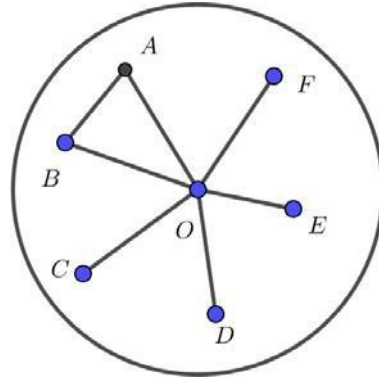
TH1. +) Nếu có một điểm trùng với tâm O thì điều phải chứng minh là hiển nhiên. Ta giả sử 6 điểm đều khác điểm O

+) Nếu có hai điểm A, B và O thẳng hàng và O nằm ngoài đoạn AB , suy ra $AB \leq 1$.

~~**TH2.** Không tồn tại hai điểm A, B và O thẳng hàng đồng thời O nằm ngoài đoạn thẳng AB . **Phản chứng**, khoảng cách hai điểm bất kỳ trong~~

6 điểm đều lớn hơn 1.

Giả sử 6 điểm xếp theo chiều ngược chiều kim đồng hồ là A, B, C, D, E, F.



Xét $\triangle OAB$ có $AB > 1 \geq \max\{OA, OB\} \Rightarrow \widehat{AOB} > \max\{\widehat{ABO},$

$\widehat{BAO}\}$

Suy ra $3.\widehat{AOB} > \widehat{AOB} + \widehat{ABO} + \widehat{BAO} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} > 60^\circ$.

Câu 5
(1,0
đ)

0,25

0,25

Tương tự :

$$\widehat{BOC} > 60^\circ, \widehat{COD} > 60^\circ, \widehat{DOE} > 60^\circ, \widehat{EOF} > 60^\circ, \widehat{FOA} > 60^\circ.$$

Như vậy : $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COD} + \widehat{DOE} + \widehat{EOF} + \widehat{FOA} > 360^\circ$
vô lý,

suy ra điều phải chứng minh.

Vậy trong mọi tình huống thì bài toán luôn đúng.

0,25

Ta có

$$x + 2 + x^2 - 2x + 4 = x^2 - x + 6$$

$$x^3 + 8 = \left(x + 2 \right) \left(x^2 - x + 4 \right) \leq \frac{(x+2)^3}{2} = \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{2}$$

$$y^3 + 8 \leq \frac{y^3 + 6y^2 + 12y + 8}{2}$$

Tương tự $y^3 + 8 \leq \frac{y^3 + 6y^2 + 12y + 8}{2}$; $z^3 + 8 \leq \frac{z^3 + 6z^2 + 12z + 8}{2}$.

0,25

Suy ra

$$\frac{x^3 + 8}{2} + \frac{y^3 + 8}{2} + \frac{z^3 + 8}{2} \geq 2 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} \right)$$

$$(*) \quad \frac{x^3 + 8}{2} + \frac{y^3 + 8}{2} + \frac{z^3 + 8}{2} \geq 2 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} \right)$$

0,25

Câu 6
(1,0đ)

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$$

- Chứng minh rằng $\frac{a^2}{u} + \frac{b^2}{v} + \frac{c^2}{w} \geq \frac{(a+b+c)^2}{u+v+w} \quad \forall a, b, c, u, v, w > 0 \quad (1)$

$$\frac{a^2}{u} + \frac{b^2}{v} + \frac{c^2}{w} \geq \frac{(a+b+c)^2}{u+v+w}$$

- Áp dụng (1) và (*) ta thu được

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} \geq \frac{(x+y+z)^2}{6}$$

$$x^3 + 8 + y^3 + 8 + z^3 + 8 \geq x^2 + y^2 + z^2 - (x + y + z) + 18$$

(2)

Ta cần chứng minh

$$\sqrt{2(x+y+z)^2} \geq 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - (x + y + z) + 18$$

$$\sqrt{} \quad \sqrt{} \quad \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 4(xy + yz + zx) \geq 18 - (x + y + z)$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z)^2 + (x + y + z) + 2(xy + yz + zx) - 18 \geq 0.$$

(3) Lại do $xy + yz + zx \geq x + y + z$ nên ta đi kiểm tra

$$(x + y + z)^2 + 3(x + y + z) - 18 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z - 3)(x + y + z + 6) \geq 0. \quad (4)$$

Thật vậy ta có quan hệ $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx) \geq 3(x + y + z)$

nên $x + y + z \geq 3$,

0,25

từ đó (4) đúng.

Từ (2), (3), (4) suy ra điều phải chứng minh.

$$\text{Dấu "="} \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

0,25

Câu 1 (2.0 điểm).

Cho biểu thức

$$A = \frac{10x + 4}{5x + 2} - \frac{5x}{1 + 5x^3} - \frac{6 - 3}{-1 - 6}$$

$$- 8 \frac{5x + 2}{5x + 2}$$

$$+ 4 \sqrt{1 + 5x^3}$$

$$\left(\frac{10x + 4}{5x + 2} - \frac{5x}{1 + 5x^3} - \frac{6 - 3}{-1 - 6} \right)$$

$$\left(\frac{10x + 4}{5x + 2} - \frac{5x}{1 + 5x^3} - \frac{6 - 3}{-1 - 6} \right)$$

Với $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4$

a) Rút gọn biểu thức P.

$$P > 7$$

b) Tìm các số tự nhiên lớn hơn 10 để

$$2$$

Câu 2 (2.0 điểm).

a) Giải phương trình

$$\frac{2x^2 - 4x}{x^2 - 4} + (x - 1)^2 = (8 - x)$$

b) Cho phương trình

$$x^2 - 2(m - 1)x + 2m - 6 = 0 \text{ (m là số thực). Tìm tất cả các giá trị}$$

của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt

thỏa mãn điều kiện

$$(x^2 + 2x + 2m - 5)(x^2 + 2m - 5) = -15$$

$$+ 2x$$

$$1 \quad 1 \quad 2 \quad 2$$

Câu 3 (1.0 điểm).

Cho các số nguyên dương a, b thỏa mãn

$$\frac{a + 2}{b} + \frac{b + 3}{a}$$

là một số nguyên dương. Gọi d

là ước chung lớn nhất của a và b. Chứng minh rằng

Câu 4 (4.0 điểm).

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 CHUYÊN TOÁN TRƯỜNG CHUYÊN HÀ NAM

Năm học 2016 – 2017

Cho đường tròn $(O; R)$

điểm A nằm ngoài đường tròn và dây BC không đi qua O. Trên tia đối của tia BC lấy điểm

A (khác B). Từ điểm A vẽ hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (O) (M, N là các tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của BC và K là giao điểm của AC với MN.

a) Chứng minh rằng IA là tia phân giác của góc $\widehat{MIN}$.

b) Chứng minh rằng $\frac{AK}{AB} = \frac{AC}{AB} + \frac{AC}{BC}$.

$$\frac{AK}{AB} = \frac{AC}{AB} + \frac{AC}{BC}$$

c) Lấy các điểm E, P, F lần lượt trên AM, MN, NA sao cho tứ giác AEDF là hình bình hành. Gọi Q là điểm đối xứng với P qua đường thẳng EF. Chứng minh rằng ba điểm O, P, Q thẳng hàng.

Câu 5 (1.0 điểm).

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 12$.

x, y, z thỏa mãn

1

$$x + y + y + z + z + x = 12$$

Chứng minh rằng $\frac{1}{2x + 3y + 3z} + \frac{1}{3x + 2y + 3z} + \frac{1}{3x + 3y + 2z} \leq 3$. Dấu đẳng thức xảy ra khi



a) Với $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4$ ta có

$$A = \frac{10x + 4}{5\sqrt{5x-3}} - 6$$

- 1

-
1

= 1)

- 2

b) Tìm các số tự nhiên lớn hơn 10 để

$$P > \frac{7}{2}$$

2

Với $x \geq 0; x \neq \frac{1}{5}; x \neq \frac{4}{5}$

. Khi đó ta có

$$3\left(\frac{1}{5} - 1\right)$$

- 2

ta được $P =$

$$P > \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{5} > \frac{7}{2}$$

$$> \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{8}{5} > \frac{7}{2}$$

$$> 0 \Leftrightarrow 2 < 8 \Leftrightarrow \frac{4}{5} < 8$$

$$x < \frac{64}{5}$$

$$P = \frac{3}{5}$$

2

2

2

2

5

5

Do x là số tự nhiên lớn hơn 10 nên ta được

$$x \in \{11; 12\} \text{ thỏa mãn yêu cầu bài toán.}$$

Câu 2.

a) Giải phương trình

$$2x^2$$

$$4x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$12x^2 - 4x + 8 = 3x$$

• **Lời giải.** Điều kiện xác định của phương trình

đã cho là Phương trình đã cho tương đương với

$$x \geq 1$$

3

hoặc $1 + \leq x \leq 3$.

$$\frac{2x^2}{x^2-2} - 4x = \frac{3}{x} \quad (2x^2 - 4x - 3 = 0)$$

$$3 - x)$$

$$\frac{2x^2}{x^2-2} - 4x = \sqrt{\frac{2x^2-4x}{x^2-2}} \quad 2x^2 - 4x - 2 \leq 3 - x$$

Phân tích và hướng dẫn giải

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 3x - 5}{3 - x} = 0 \quad (2x^2 - 3x - 5) = 0$$

$$(2x^2 - 3x - 5) \left(\frac{2x^2 - 4x + 2}{2} \right) = (3 - x) \cdot 0$$

$$\left(\frac{2x^2 - 4x + 2}{2} \right) + (3 - x) = 0$$

Để thấy

$$\frac{2x^2 - 4x + 2}{2} = \frac{2(x^2 - 2x + 1)}{2} = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

0 nên từ phương trình trên ta được

$$2x^2 - 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 5] \\ \{ -1; 2 \} \\ \{ -1; 2 \}$$

• **Lời giải.** Xét phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 6 = 0$ với m là tham số.

Ta có m . $\Delta' = m^2 - 4m + 7 = (m-2)^2 + 3 > 0$ với mọi m . Do đó phương trình có nghiệm với mọi

Theo hệ thức Vi – et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 x_2 = 2m - 6 \end{cases}$. □

$\begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases}$

Ta có $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2m - 5 = 2mx + 1$

Do x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình nên ta có ta có

$$(x_1^2 + 2x_1 + 2m - 5)(x_2^2 + 2x_2 + 2m - 5) = -15$$

$$\Leftrightarrow (2mx_1 + 1)(2mx_2 + 1) = -15 \Leftrightarrow 4m^2 x_1 x_2 + 2m(x_1 + x_2) + 1 = -15$$

$\frac{1}{2}$

Kết hợp với hệ thức Vi – et ta được

$$4m^2(2m-6) + 4m(m-1) + 16 = 0 \Leftrightarrow 2m^3 - 5m^2 - m + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-1)(2m^2 - 3m - 4) = 0 \quad \left| \begin{array}{l} 3 - 41 \\ 3 + 41 \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow m \in \{$$

$$\left| \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \right|$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta có tập nghiệm là $S = \left\{ \frac{5}{2} \right\}$

b) Cho phương trình $x^2 - 2mx + 1 = 0$ (m là số thực). Tìm tất cả các giá trị của m

Để phương trình đã cho có nghiệm thì phải thỏa mãn điều kiện $\Delta \geq 0$ hay $4m^2 - 4 \geq 0$ hay $m^2 \geq 1$ hay $m \leq -1$ hoặc $m \geq 1$.

$$\sqrt{4m^2 - 4} = \sqrt{4(m^2 - 1)} = 2\sqrt{m^2 - 1}$$

Câu 3. Cho các số nguyên dương a, b thỏa mãn $\frac{a+2}{b} + \frac{b+3}{a}$ là một số nguyên dương. Chứng minh rằng $d^2 \mid 2a + 3b$.

• **Lời giải.** Vì d là ước chung lớn nhất của a và b nên tồn tại các số tự nhiên a_1, b_1 thỏa mãn các điều kiện

$$a = da_1; b = db_1 \text{ và } (a_1, b_1) = 1.$$

Đặt $\frac{a+2}{b} + \frac{b+3}{a} = k$ khi đó ta được $kab = a^2 + 2a + b^2 + 3b$. Từ đó ta được

$$kd^2a_1b_1 = d^2a_1^2 + d^2b_1^2 + 2a_1 + 3b_1 \Leftrightarrow 2a_1 + 3b_1 = d^2(k a_1 b_1 - a_1^2 - b_1^2).$$

Do a, b, k là các số nguyên dương nên suy ra $k a_1 b_1 - a_1^2 - b_1^2$ là số nguyên dương.

Từ đó ta được $k a_1 b_1 - a_1^2 - b_1^2 \geq 1$. Như vậy từ $2a_1 + 3b_1 = d^2(k a_1 b_1 - a_1^2 - b_1^2)$ ta được

$$d^2 = \frac{2a_1 + 3b_1}{k a_1 b_1 - a_1^2 - b_1^2} \leq \frac{2a_1 + 3b_1}{1} = 2a_1 + 3b_1$$

$$k a_1 b_1 - a_1^2 - b_1^2 \geq 1$$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

a) Chứng minh IA là tia phân giác của $\widehat{MIN}$.

góc Do AM và AN là tiếp tuyến với (O)

và I trung điểm của BC nên ta có

$$\widehat{AIO} = \widehat{AMO} = \widehat{ANO} = 90^\circ.$$

Từ đó suy ra năm điểm A, M, I, O, N cùng nằm trên đường tròn đường kính AO.

Từ đó dẫn đến $\widehat{AIM} = \widehat{AOM}$ và

$\widehat{NIA} = \widehat{NOA}$. Mà $\widehat{MOA} = \widehat{NOA}$ nên suy

ra $\widehat{MIA} = \widehat{NIA}$.

Từ đó suy ra IA là tia phân giác của

góc $\widehat{MIN}$.

b) Chứng minh $AK^2 = AB \cdot AC$.

$$AK^2 = AB \cdot AC$$

Gọi H là giao điểm của AO với MN. Xét hai tam giác AHK và AIO có

$$\widehat{HK} = \widehat{AIO} = 90^\circ \text{ và}$$

$$\widehat{HAK} \text{ chung nên } \Delta AHK \sim \Delta AIO \Rightarrow AK \cdot AI = AH \cdot AO.$$

ΔAIO . Từ đó ta được

Dễ dàng chứng minh được

$AB.AC$ **Câu 4.** Cho đường tròn $(O; R)$ và dây BC không đi qua O. Trên tia đối của tia BC lấy điểm

A (khác B). Từ điểm A vẽ hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (O) (M, N là các tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của BC và K là giao điểm của AC với MN.

Như vậy ta được

$$AI.AK = AB.AC. \text{ Đề ý rằng}$$

$$AI = \frac{AB + AC}{2}.$$

Do đó

$$\frac{AB + AC}{2}.AK = AB.AC \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{AB + AC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}.$$

2

$$AK = \frac{AB.AC}{AB + AC}$$

c) Lấy các điểm E, P, F lần lượt trên AM, MN, NA sao cho tứ giác AEDF là hình bình hành. Gọi Q là điểm đối xứng với P qua đường thẳng EF. Chứng minh rằng ba điểm O, P, Q thẳng hàng.

Do P và Q đối xứng với nhau qua EF nên

$$\widehat{EQF} = \widehat{EPF} \text{ và } \widehat{QFE} = \widehat{PFE}.$$

Do AEPF là hình bình hành $\widehat{EAF} = \widehat{EPF}$ và nên ta được

$$\widehat{PFE} = \widehat{AEF}.$$

Từ đó suy ra

$\widehat{EAF} = \widehat{EQF}$ nên tứ giác AQEF nội tiếp đường tròn, do đó

$$\widehat{QAE} = \widehat{QFE}; \widehat{QEA} = \widehat{QFA}.$$

Suy ra $\widehat{QAE} = \widehat{AEF}$ nên AQ song song với EF, do đó AQEF là hình thang cân nên

$$QE = FA = EP.$$

minh được

$$EP = ME = QE; QF = AE = PF = NE; \widehat{QFN} = \widehat{QEM}.$$

Từ đó ta được tam giác QME đồng dạng với tam giác QNF nên $\widehat{QNF} = \widehat{QMA}$, suy ra tứ giác AQMN nội tiếp đường tròn. Điều này dẫn đến sáu điểm A, M, N, O, I, Q cùng nằm trên đường tròn đường kính AO. Do đó suy ra $\widehat{AQO} = 90^\circ$ $PQ \perp EF$ và AQ

$\Rightarrow OQ \perp QA$. Mà ta đã có

song song với EF. Do đó ta được ba điểm O, P, Q thẳng hàng.

Câu 5. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 12$$

Chứng minh

$$2x + 3y + 3z \geq 2z \quad 3x + 2y + 3z \geq 3x + 3y \quad 3x + 3y \geq 3z$$

g
n
à
o
?

Đầu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} a = x + y \\ 2x + 3y + 3z = a + 2b + c \end{cases}$$

• Lời giải. Đặt

$$\begin{cases} x = a - y \\ y = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = x + y \\ 2x + 3y + 3z = a + 2b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = x + y \\ 2x + 3y + 3z = a + b + 2c \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = z + x \\ 3x + 3y + 2z = 2a + b + c \end{cases}$$

Giả thiết của bài toán trở thành $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 12$ và bất đẳng thức cần chứng minh được viết

lại thành $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3$

$$\frac{1}{a + 2b + c} + \frac{1}{a + b + 2c} + \frac{1}{2a + b + c}$$

Áp dụng bất đẳng thức dạng $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \geq \frac{1}{A + B}$ ta có

$$A + B$$

$$\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right)$$

$$\frac{16}{a + 2b + c} = \frac{16}{a + b + b + c} \leq \frac{4}{a + b} + \frac{4}{b + c} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c}$ $\frac{1}{b} \leq \frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

$$\frac{a+b+2c}{a} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{2a+b+c}{a} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{16}{a+b+2c} + \frac{16}{a+b+c} + \frac{16}{2a+b+c} \leq 4 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 4 \cdot 12 = 48$$

$$\frac{a+b+2c}{a+b+c} \cdot \frac{a+b+c}{2a+b+c}$$

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{b}{c} \right| \leq \frac{a}{c} + \frac{b}{a}$$

$$a+b+2c$$

Hay ta được $\frac{1}{a+b+2c} + \frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{2a+b+c} \leq 3$.

$$\frac{a+b+2c}{a+b+c} \cdot \frac{a+b+c}{2a+b+c}$$

Do đó ta được $\frac{1}{2x+3y+3z} + \frac{1}{3x+2y+3z} + \frac{1}{3x+2y+3z} \leq 3$

$$\leq \frac{3}{x} + \frac{3}{y} + \frac{2}{z}$$

úc được chứng minh. Dấu
và chỉ khi

$$x=y=z=1$$