# CORRECTION DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES ATS 1999

## EXERCICE

L'équation à intégrer est une équation linéaire du premier ordre à coefficients non constants, a(x)y'(x)+b(x)y(x)=c(x). de plus les fonctions a et b sont continues sur [ -1 ; 1 ] et a(x) ne s'annule pas et garde un signe constant.
Sur chacun des intervalles [ -1 ; 0 [ et ] 0 ; 1 ] la résolution de l'équation sans second membre donne respectivement: y(x)= $K_1$ et y(x) = ))
Afin de déterminer la solution générale sur les intervalles correspondant, on considère la méthode de la variation de la constante, ce qui conduit à :
Sur [ - 1 ; 0[ y(x)=x - ( arcsin(x)+$k_1$)
Sur ] 0 ; 1] y(x)= - + )) + ))
Le raccordement en 0 conduit à $k_1 = k_2$

## PROBLÈME

### I. PREMIÈRE PARTIE : ÉTUDE D'UN EXEMPLE

#### 1. Quel est le rang de *A* ?

U ker(A) x = y = z
Ainsi ker(A) est la droite vectorielle engendrée par le vecteur ( 1 ; 1 ; 1 ). D'où rg(A) = 3-1=2.

#### 2. Quelles sont les valeurs propres de *A* ?

Le polynôme caractéristique de A est P(λ) = λ(9-λ²)
Les valeurs propres sont donc 0 ; 3 et –3

sp(A)= { 3 ; 0 ; 3 }

#### 3. Recherche d'une matrice X

##### a) Calculer $A^3$

$A^2$ = et $A^3 = 9A$

##### b) En déduire une matrice $X = \phi(A)$ associée à *A*.

De l'égalité $A^3 = 9A$ on déduit A.A).A=A , d'où une proposition pour X est X=A). La vérification des deux autres égalités définissant X est immédiate.

#### 4. Quel est le rang de *X* ?

rg(X)=rg(A)=2

#### 5. Quelles sont les valeurs propres de *X* ?

Afin de déterminer les valeurs propres de X, on détermine son polynôme caractéristique.

PX(()=det ( X -(Id) = det( eq \s\do1(\f(1;9))A-(Id)=det( eq \s\do1(\f(1;9))(A-9(Id))
Donc PX(()=0 CARSPECIAUX 219 \f "Symbol"\h 9 ( CARSPECIAUX 206 \f "Symbol"\h sp(A)

sp(X)= { EQ \s\do2(\f(1;3)) ; 0 ; EQ \s\do2(\f(1;3)) }
DEUXIÈME PARTIE QUELQUES PROPRIéTéS
Unicité de X =( (A )
Soient X et Y deux matrices vérifiant la propriété P pour une matrice A donnée
Démontrer que AX=YA et AY = XA
AX= (AYA)X (définition de Y)= (YAA)X (associativité du produit de matrice)=Y(AAX) (associativité du produit de matrice)=Y(AXA) (définition de X)=YA (définition de X)D'où eq \x(AX = YA)
On démontre de même eq \x(AY = XA)
En déduire que X = Y
X=XAX (définition de X)=AYX (AY=XA)=YAX (définition de Y)=YYA (AX=YA)=YAY (définition de Y)=Y (définition de Y)Ainsi eq \x(X=Y)
Déterminer la matrice X =( (M ) pour les matrices suivantes
M est inversible
MXM=M CARSPECIAUX 222 \f "Symbol"\h M-1MXM=M-1M CARSPECIAUX 222 \f "Symbol"\h XM=Id CARSPECIAUX 222 \f "Symbol"\h XMM-1 = M-1 CARSPECIAUX 222 \f "Symbol"\h eq \x(X = M-1)
M =( (A )
M= ( (A) CARSPECIAUX 219 \f "Symbol"\h eq \b\lc\{( \s(MAM=M ;AMA=A ;AM=MA))
X=( (M) CARSPECIAUX 219 \f "Symbol"\h eq \b\lc\{( \s(XMX=X ;MXM=M ;XM=MX))
La matrice A répond à la question. Or la réponse est unique donc eq \x((o( (A)=A)
M = ( A où ( CARSPECIAUX 206 \f "Symbol"\h EQ \o(I;C)*
eq \b\lc\{( \s(AXA=A ;XAX=X ;AX=XA)) CARSPECIAUX 222 \f "Symbol"\h eq \b\lc\{( \s((A eq \b( eq \s\do1(\f(1;( ))X)(A = (A ; eq \b( eq \s\do1(\f(1;( ))X)(A eq \b( eq \s\do1(\f(1;( ))X)= eq \b( eq \s\do1(\f(1;( ))X) ; eq \b( eq \s\do1(\f(1;( ))X)(A =(A eq \b( eq \s\do1(\f(1;( ))X)))
d'où ( ( ( A )= eq \s\do1(\f(1;( ))( ( A )
Recherche de ( (An ) pour n CARSPECIAUX 206 \f "Symbol"\h EQ \o\al(I;\d\fo2()N)
Soit X =( (A ) , démontrer :
A²X = XA² = A
A²X=AXA=A=XAA=XA²
AX² = X²A = X
AX²=AXX=XAX=X=XXA=X²A
En déduire ( (A² ) en fonction de X
A²X²A²=A²XXA²=AA=A²
X²A²X²=X²AAX²=XX=X²
A²X²=A²XX=XA²X=XXA²=X²A²
Donc eq \x(( ( A² ) = (( ( A ) )²)
Déterminer ( (An ) pour n CARSPECIAUX 206 \f "Symbol"\h EQ \o\al(I;\d\fo2()N)
On démontre par récurrence ( ( An )=( ( ( A ) )n pour tout entier naturel n
TROISIÈME PARTIE : VALEURS PROPRES de X =( (A)
Supposons A quelconque et désignons par ( une valeur propre éventuelle de A
associée au vecteur propre u.
Si (( 0 montrer que INCORPORER Equation.2 est une valeur propre de X.
AXAU=XA²U=(²XU car U est un vecteur propre associé à la valeur propre (
De plus AXAU = AU = ( U
D'où, puisque ( CARSPECIAUX 185 \f "Symbol"\h 0, on en déduit XU = eq \s\do1(\f(1; ()))U
Démontrer que Ker( A ) =Ker (X )
U CARSPECIAUX 206 \f "Symbol"\h ker(A) CARSPECIAUX 219 \f "Symbol"\h AU = 0
CARSPECIAUX 222 \f "Symbol"\h XU=XAXU=X²AU=O CARSPECIAUX 222 \f "Symbol"\h U
CARSPECIAUX 206 \f "Symbol"\h Ker(X)

Un raisonnement analogue montre que Ker(X) CARSPECIAUX 204 \f "Symbol"\h Ker(A)
Donc eq \x(Ker(A)=Ker(X))
En déduire l'ensemble des valeurs propres de X en fonction des valeurs propres de A.
Si 0 est valeur propre de A alors, de l'égalité précédente, on déduit que 0 est valeur propre de X. si ( est une valeur propre de A , de la question 1, on déduit que eq \s\do1(\f(1;()) est valeur propre de X.
Soit D une matrice diagonale, déterminer ( (D)
Si D = (dij (ij) alors X = ( (D) = eq \b( eq \s\do1(\f(1;dij ))(ij) avec comme convention eq \s\do1(\f(1;dij )) = 0 si dij = 0
Si A est diagonalisable, de matrice diagonale D et de matrice de passage P, déterminer ( (A) en fonction de P et de ( (D).
A = PDP-1 alors X = P( (D)P-1 répond à la question, il suffit pour cela de vérifier les trois conditions définissant X.

QUATRIÈME PARTIE : résolution d'ÉQUATION DANS Mn ;n( EQ \o(I;C))

A , B et C étant trois matrices prises dans l'ensemble Mn ;n(EQ \o(I;C) ), on se propose de résoudre l'équation AZB=C
On désigne dans toute cette partie, X = ((A) et Y = ((B)

Démontrer que cette équation AZB=C admet des solutions si et seulement si AXCYB=C.
Soit Z une solution de cette équation.
AZB=CCARSPECIAUX 222 \f "Symbol"\h (AXA)Z(BYB)=CCARSPECIAUX 222 \f "Symbol"\hAX(AZB)YB=CCARSPECIAUX 222 \f "Symbol"\hAXCYB=CRéciproquement AXCYB=CCARSPECIAUX 222 \f "Symbol"\h A(XCY)B=CCARSPECIAUX 222 \f "Symbol"\h XCY est une solution de l'équation AZB =C
On suppose que cette condition est satisfaite. On désire déterminer la forme générale des solutions de l'équation AZB=C.
Soit Z0 une solution particulière de l'équation AZB=C, démontrer que Z est une autre solution de cette équation si et seulement si Z = Z0 + M où M est une solution de l'équation AZB=0

Soit Z0 une solution de AZB = C, alors A(Z0 + M)B=AZ0B +AMB
Donc AZB = C CARSPECIAUX 219 \f "Symbol"\h AMB =0

Démontrer que les matrices T - XATBY où T CARSPECIAUX 206 \f "Symbol"\h Mn ;n sont solutions de l'équation AZB =0.

A(T-XATBY)B=ATB-A(XATBY)B=ATB-(AXA)T(BYB)=ATB-ATB=0

Soit ( l'endomorphisme de Mn,n ( EQ \o(I;C) ) défini par ( ( T ) = T – XATBY Soit Z une solution de l'équation AZB =0, déterminer ((Z).
Si S désigne l'ensemble des solutions de l'équation AZB = 0, alors montrer que S CARSPECIAUX 204 \f "Symbol"\h Im( ( ).

((Z) = Z – XAZBY = Z

Z CARSPECIAUX 206 \f "Symbol"\h SCARSPECIAUX 222 \f "Symbol"\h Z= ((Z).
CARSPECIAUX 222 \f "Symbol"\h Z CARSPECIAUX 206 \f "Symbol"\h Im(( )
Donc eq \x(S CARSPECIAUX 204 \f "Symbol"\h Im(( ))

En déduire l'ensemble des solutions de l'équation AZB=C.

Z CARSPECIAUX 206 \f "Symbol"\h Im(( )CARSPECIAUX 222 \f "Symbol"\h CARSPECIAUX 36 \f "Symbol"\h T CARSPECIAUX 206 \f "Symbol"\h Mn.n(EQ \o(I;C)) / Z = T – XATBYCARSPECIAUX 222 \f "Symbol"\h AZB=0CARSPECIAUX 222 \f "Symbol"\h Z CARSPECIAUX 206 \f "Symbol"\h S
Donc eq \x(Im(( ) CARSPECIAUX 204 \f "Symbol"\h S) . En conclusion eq \x(Im(( ) = S)
Application
Soit A la matrice décrite dans la première partie.
Soit B = eq \b\bc\[(\a\ac\hs4\co1(1 0 0 ;1 0 0 ;0 0 0)). et C = eq \b\bc\[(\a\ac\hs4\co1(-6 0 0 ;-3 0 0 ;-3 0 0))
Diagonaliser la matrice B. En déduire ((B)
Les calculs très simples conduisent à B = PDP-1 avec P= eq \b\bc\[(\a\ac\hs4\co1(1 0 0 ;1 1 0 ;0 0 1 )) ; D = eq \b\bc\[(\a\ac\hs4\co1(1 0 0 ;0 0 0 ;0 0 0 )) et P-1 = eq \b\bc\[(\a\ac\hs4\co1(1 0 0 ;-1 1 0 ;0 0 1 ))
Déterminer une matrice diagonale solution de l'équation AZB = C .
Soit Z = eq \b\bc\[(\a\ac\hs4\co1(a 0 0 ;0 b 0 ;0 0 c)) une matrice diagonale. AZB = C conduit à eq \b\lc\{( \s(–3b=-6 ;-3a=-3 ;3a-3b=-3))
Soit a = 1 ; b = 2 et c CARSPECIAUX 206 \f "Symbol"\h EQ \o(I;C) ( on prendra c=0)
eq \x(Z0 = eq \b\bc\[(\a\ac\hs4\co1(1 0 0 ;0 2 0 ;0 0 0 )))
En déduire la forme générale des solutions de l'équation AZB = C.
Les matrices solutions de l'équation AZB = C sont les matrices
Z = Z0 + T – XATBY où T est une matrice quelconque.