Практическая работа № 28.Арифметические операции над двоичными числами.

Цель: выполнить упражнения и научиться считать используя двоичную арифметикую.

Арифметика двоичной системы счисления основана на использовании таблиц сложения, вычитания и умножения. Эти таблицы чрезвычайно просты:

Таблица сложения

0	+	0	=	0
0	+	1	=	1
1	+	0	=	1
1	+	1	=	10

Таблица умножения

0	*	0	=	0
0	*	1	=	0
1	*	0	=	0
1	*	1	=	1

Таблица вычитания

0	–	0	=	0
1	–	0	=	1
1	–	1	=	1
10	–	1	=	1

4.3.1 Двоичное сложение

Двоичное сложение выполняется по тем же правилам, что и десятичное, с той лишь разницей, что перенос в следующий разряд производиться после того, как сумма достигнет не десяти, а двух.

Пример 4.5 *Сложение двоичных чисел* $(101101)_2$ *и* $(111110)_2$

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 101101 \\ 111110 \end{array} \\ \hline 010011 \end{array}$$ – поразрядная сумма без учета переносов

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 1011000 \\ 0010011 \end{array} \\ \hline 1001011 \end{array}$$ 1011000 – переносы; 1001011 – поразрядная сумма без учета повторных переносов

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 0100000 \\ 1001011 \end{array} \\ \hline 1101011 \end{array}$$ 0100000 – повторные переносы; 1101011 – окончательный результат

Легко произвести проверку:

$(101101)_2 = 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 32+8+4+1 = (45)_{10}$,

$(111110)_2 = 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 32+16+8+4+2 = (62)_{10}$,

$(1101011)_2 = 1\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 64+32+8+2 = (107)_{10}$,

$(45)_{10} + (62)_{10} = (107)_{10}$.

Пример 4.6 *Сложение двоичных чисел* $(110{,}1011)_2$ *и* $(10111{,}10101)_2$

$$
\begin{array}{r l}
+\begin{array}{r} 110{,}1011 \\ 10111{,}10101 \\ \hline 10001{,}00011 \end{array} & \text{– поразрядная сумма без учета переносов}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r l}
+\begin{array}{r} 11\ \ 1,\ \ 1\ \ \ \ \ \\ 10001{,}00011 \\ \hline 11100{,}01011 \end{array} & \begin{array}{l} \text{– переносы} \\ \\ \text{– поразрядная сумма без учета повторных переносов} \end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r l}
+\begin{array}{r} 1\ \ ,\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \\ 11100{,}01011 \\ \hline 11110{,}01011 \end{array} & \begin{array}{l} \text{– повторные переносы} \\ \\ \text{– окончательный результат} \end{array}
\end{array}
$$

Сложение нескольких чисел вызывает некоторые трудности, так как в результате поразрядного сложения могут получится переносы, превышающие единицу.

4.3.2 Двоичное вычитание

Вычитание в двоичной системе выполняется аналогично вычитанию в десятичной системе счисления. При необходимости, когда в некотором разряде приходится вычитать единицу из нуля, занимается единица из следующего старшего разряда. Если в следующем разряде нуль, то заем делается в ближайшем старшем разряде, в котором стоит единица. При этом следует понимать, что занимаемая единица равна двум единицам данного разряда, т. е. вычитание выполняется по следующему правилу:

Пример 4.7 *Вычитание двоичных чисел* $(11010{,}1011)_2$ *и* $(1101{,}01111)_2$

$$
-\begin{array}{r} 11010{,}1011\ \\ 1101{,}01111 \\ \hline 1101{,}00111 \end{array}
$$

Конечно, математически вычитание выполнить несложно. Однако, если поступать таким образом, то к примеру в ЭВМ придется для выполнения сложения и вычитания иметь два блока: сумматор и вычитатель. Поэтому поступают следующим образом: вычитание можно представить как сложение положительного и отрицательного чисел, необходимо только подходящее представление для отрицательного числа.

Рассмотрим четырехразрядный десятичный счетчик, какие в автомобиле отсчитывают пройденный путь. Пусть он показывает число 2, если вращать его в обратном направлении, то сначала появится 1, затем 0, после 0 появится число 9999. Сложим, к примеру, 6 с этим числом:

$$
+\begin{array}{r} 6 \\ 9999 \\ \hline 10005 \end{array}
$$

Если пренебречь единицей переноса и считать 9999 аналогом –1, то получим верный результат: $6+(-1)=5$.

Число 9999 называется *десятичным дополнением* числа 1**.** Таким образом, в десятичной системе счисления отрицательные числа могут быть представлены в форме десятичного дополнения, а знак минус можно опустить.

Двоичное дополнение числа определяется как то число, которое будучи прибавлено к первоначальному числу, даст только единицу переноса в старшем разряде.

Пример 4.8 *Двоичное дополнение числа* $(10101111)_2$

$$\begin{array}{rl} & 010101111 \text{ – число} \\ + & \underline{101010001} \text{ – двоичное дополнение} \\ & 1000000000 \text{ – сумма} \end{array}$$

↑ – единица переноса

Для получения двоичного дополнения необходимо:

- получить обратный код, который образуется инвертированием каждого бита:
  010101111 – число
  101010000 – обратный код
- прибавить к обратному коду единицу, образовав таким образом дополнительный код:

$$\begin{array}{rl} & 101010000 \text{ – обратный код} \\ + & \underline{1} \\ & 101010001 \text{ – дополнительный код} \end{array}$$

Пример 4.9 *Вычитание в дополнительном коде*

$$12-7$$
$$12_{10}=01100_2$$
$$7_{10}=00111_2$$

11000 – обратный код,

11001 – дополнительный код.

$$\begin{array}{r} 01100 \\ +\;\underline{11001} \\ 100101 \end{array}$$

$100101_2=5_{10}$ (верно).

4.3.3 Двоичное умножение

Умножение двух двоичных чисел выполняется так же, как и умножение десятичных. Сначала получаются частичные произведения и затем их суммируют с учетом веса соответствующего разряда множителя.

Отличительной особенностью умножения в двоичной системе счисления является его простота, обусловленная простотой таблицы умножения. В соответствии с ней, каждое частичное произведение или равно нулю, если в соответствующем разряде множителя стоит нуль, или равно множимому, сдвинутому на соответствующее число разрядов, если в соответствующем разряде множителя стоит единица. Таким образом, операция умножения в двоичной системе сводится к операциям сдвига и сложения.

Умножение производится, начиная с младшего или старшего разряда множителя, что и определяет направление сдвига. Если сомножители имеют дробные части, то положение запятой в произведении определяется по тем же правилам, что и для десятичных чисел.

Пример 4.10 *Умножение двоичных чисел* $(101)_2$ *и* $(011)_2$

$$\begin{array}{l}
5\cdot 3 \\
101 \\
\underline{11} \\
101 \\
\underline{101} \\
1111 = 15_{10}
\end{array}$$

4.3.4 Двоичное деление

Деление чисел в двоичной системе производится аналогично делению десятичных чисел. Рассмотрим деление двух целых чисел, так как делимое и делитель всегда могут быть приведены к такому виду путем перениесения запятой в делимом и делителе на одиноаковое число разрядов и дописывания необходимых нулей. Деление начинается с того, что от делимого слева отделяется минимальная группа разрядов, которая, рассматриваемая как число, превышает или равна делителю. Дальнейшие действия выполняются по обычным правилам, причем последняя целая цифра частного получается тогда, когда все цифры делимого исчерпаны.

Пример 4.11 *Деление двоичных чисел*

1) 18:2

$$\begin{array}{l|l}
10010 & 10 \\ \cline{2-2}
10 & 1001=(9)_{10} \\ \hline
\;00 & \\
\;\underline{00} & \\
\;001 & \\
 & \\
\;\underline{000} & \\
\quad 10 & \\
\quad \underline{10} & \\
\quad 00 &
\end{array}$$

2) 14:4

$$\begin{array}{l|l}
1110 & 100 \\ \cline{2-2}
100 & 11{,}1=(3{,}5)_{10} \\ \hline
\;110 & \\
\;\underline{100} & \\
\quad 100 & \\
 & \\
\quad \underline{100} & \\
\qquad 0 &
\end{array}$$

Таким образом, выполнение арифметических операций в двоичной системе счисления достаточно просто. Особенно просто выполнять операции сложения, вычитания и умножения. Благодоря этому, применение двоичной системы в вычислительных машинах позволяет упростить схемы устройств, в которых осуществляются операции над числами.