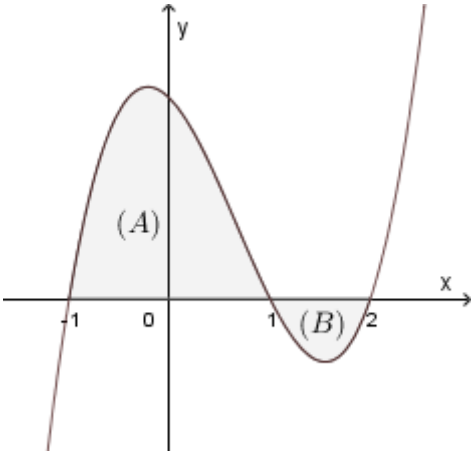
Câu 1. **[2D3-5.7-3] (CHUYÊN THÁI BÌNH LẦN V NĂM 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng diện tích các hình phẳng (A) và (B) lần lượt bằng 15 và 3. Tích phân $\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{x}f(3\ln x+2)\mathrm{d}x$ bằng



A. 4. **B.** -4. **C.** 6. **D.** -6.

Lời giải

Tác giả: Phan Minh Quốc Vinh; Fb: Vinh Phan

Chọn A

Hình phẳng (A) giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=0$, $x=-1$, $x=1$ và có phần đồ thị nằm phía trên trục hoành nên ta có $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=15$.

Hình phẳng (B) giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=0$, $x=1$, $x=2$ và có phần đồ thị nằm phía dưới trục hoành nên ta có $\int_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=-3$.

Xét tích phân $I=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{x}f(3\ln x+2)\mathrm{d}x$

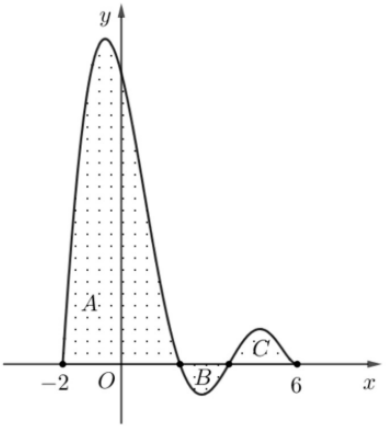
Đặt $t=3\ln x+2\Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{3}{x}\mathrm{d}x\Rightarrow \frac{\mathrm{d}t}{3}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

Đổi cận

- Với $x=\frac{1}{e}\Rightarrow t=-1$.
- Với $x=1\Rightarrow t=2$.

Do đó $I=\int_{-1}^{2}f(t)\frac{\mathrm{d}t}{3}=\frac{1}{3}\int_{-1}^{2}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\left(\int_{-1}^{1}f(t)\mathrm{d}t+\int_{1}^{2}f(t)\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{3}(15-3)=4$.

Câu 2. **[2D3-5.7-3] (Đặng Thành Nam Đề 12)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;6]$ và có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng diện tích các hình phẳng A,B,C trong hình vẽ lần lượt bằng $32;2;3$. Tích phân $\int_{-2}^{2}\left(f(2x+2)+1\right)dx$ bằng (thiếu dấu cách)



A. 22,5. **B.** 19,5. **C.** 37. **D.** 20,5.

Lời giải

Chọn D

Đổi biến $t=2x+2\Rightarrow dt=2dx; x=-2\Rightarrow t=-2; x=2\Rightarrow t=6.$

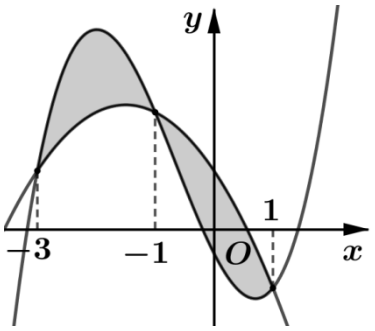
Khi đó:

$$I=\int_{-2}^{2}\left(f(2x+2)+1\right)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{6}(f(t)+1).\frac{1}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{-2}^{6}f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_{-2}^{6}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{-2}^{6}f(t)\mathrm{d}t+4.$$

Trên đoạn $[-2;6]$ ta có $f(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\\t=a\\t=b\\t=6\end{array}\right.\ (-2<a<b<6).$ Dựa trên diện tích các hình phẳng có: $\int_{-2}^{a}f(t)\mathrm{d}t=S_A=32;\int_{a}^{b}f(t)\mathrm{d}t=-S_B=-2;\int_{b}^{6}f(t)\mathrm{d}t=S_C=3.$

Vậy $\int_{-2}^{6}f(t)dt=\int_{-2}^{a}f(t)dt+\int_{a}^{b}f(t)dt+\int_{b}^{6}f(t)dt=32-2+3=33.$ Vậy $I=\frac{33}{2}+4=20,5.$

Câu 3. **[2D3-5.7-3] (Cụm 8 trường Chuyên Lần 1)** Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-\frac{1}{2}$ và $g(x)=dx^2+ex+1$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-3;-1;1$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho (miền tô đậm) có diện tích bằng

A. $\frac{9}{2}$. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thị Ngọc Lan; Fb: Ngoclan nguyen

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là

$ax^3+bx^2+cx-\frac{1}{2}=dx^2+ex+1 \Leftrightarrow ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-\frac{3}{2}=0$

Do đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-3;-1;1$ nên $ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-\frac{3}{2}=k(x+3)(x+1)(x-1)$ (1) trong đó $k\neq 0$.

$(1)\Leftrightarrow ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-\frac{3}{2}=k(x^3+3x^2-x-3)$

$\Leftrightarrow ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-\frac{3}{2}=kx^3+3kx^2-kx-3k$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=k\\ b-d=3k\\ c-e=-k\\ -\frac{3}{2}=-3k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b-d=\frac{3}{2}\\ c-e=-\frac{1}{2}\\ k=\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Vậy $f(x)-g(x)=\frac{1}{2}(x^3+3x^2-x-3)$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho (miền tô đậm) là

$$S=\left|\int_{-3}^{-1}\frac{1}{2}(x^3+3x^2-x-3)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(x^3+3x^2-x-3)\mathrm{d}x\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{4}x^4+x^3-\frac{1}{2}x^2-3x\right)\Big|_{-3}^{-1}\right|+\frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{4}x^4+x^3-\frac{1}{2}x^2-3x\right)\Big|_{-1}^{1}\right|=2+2=4.$$