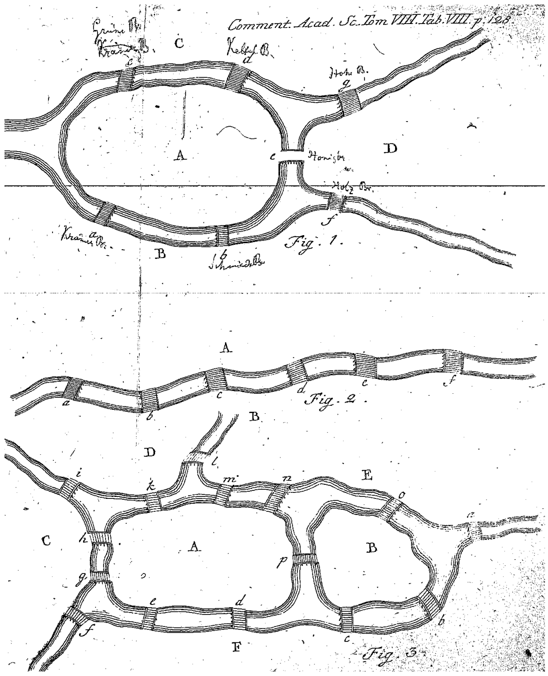
Chapitre 10
Graphes

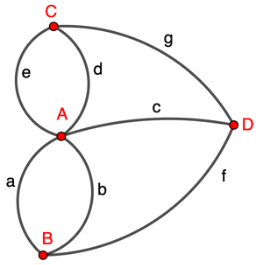
I. Un problème historique

En 1735, Leonhard Euler (1707-1783), dans son livre évoque le problème des ponts de Königsberg qui s'énonce comme suit. À Königsberg, en Poméranie, se situe une île appelée Kneiphof (A). Le fleuve qui l'entoure se divise en deux bras, sur lesquels sont jetés les sept ponts a, b, c, d, e, f, g (voir figure 1 ci-contre). Peut-on trouver un cheminement ne passant qu'une seule fois sur chaque pont ?
Il montra alors que le problème est impossible à résoudre, contrairement aux problèmes similaires des figures 2 et 3.
Ainsi naissaient les premiers résultats sur la théorie des graphes.



II. Graphes, chemins et sommets

Le graphe modélisant le problème précédent est le suivant.
Les quartiers de Königsberg sont matérialisés par les sommets A, B, C, D.
Les ponts sont matérialisés par les arêtes a, b, c, d, e, f, g.



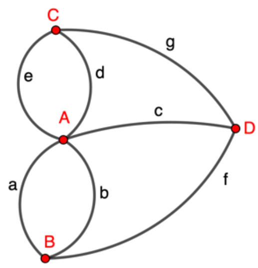
Définition 1
Un **graphe** G est un couple (V, E) muni d'une application φ, où V est un ensemble fini de **sommets** ($Vertice$ en anglais) et E est un ensemble fini d'**arêtes** ($Edge$ en anglais). Si le **graphe** est **orienté**, φ est une application de E dans V^2 définie par, si x et y désignent les **extrémités** de l'arête e
$$\varphi(e) = (x, y)$$
Si le **graphe** n'est **pas orienté**, φ est une application de E dans $\{\{x, y\}|x, y\in V\}$ définie par
$$\varphi(e) = \{x, y\}$$
Dans ce cas, x et y sont dits **adjacents** ou **voisins** dans le graphe G. L'arête e est **incidente** aux sommets x et y.
Deux arêtes e et e' sont **incidentes** si elles ont une extrémité en commun, elles sont **indépendantes** sinon.
Un sommet est **isolé** si aucune arête ne le relie à un autre sommet. Une arête reliant un sommet à lui-même est une **boucle**.

Définition 2
Un graphe est **simple** s'il ne comporte aucun sommet isolé ni **arêtes multiples** (c'est-à-dire des arêtes distinctes incidentes à deux sommets identiques). Dans le cas contraire, on parle de **multigraphe**.
Un graphe est **complet** si chaque sommet est adjacent à tous les autres.

Définition 3
Soit un graphe G. L'**ordre** $|G|$ du graphe G est le **nombre** de ses **sommets**. Le **voisinage** d'un sommet est l'ensemble de ses voisins. Le **degré** $d(x)$ d'un sommet x est le **nombre** de ses **arêtes incidentes** (comptées 2 fois en cas de boucle).
Un sommet de **degré 0** est un **sommet isolé**.

Exemples

- Dans le graphe $G = (V, E)$ modélisant le problème des ponts de Königsberg, on a
$$V = \{A, B, C, D\}\ et\ E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$



$$\varphi(a) = \varphi(b) = \{A, B\}\ \varphi(c) = \{A, D\}\ \varphi(d) = \varphi(e) = \{A, C\}\ \varphi(f) = \{B, D\}\ \varphi(g) = \{C, D\}$$

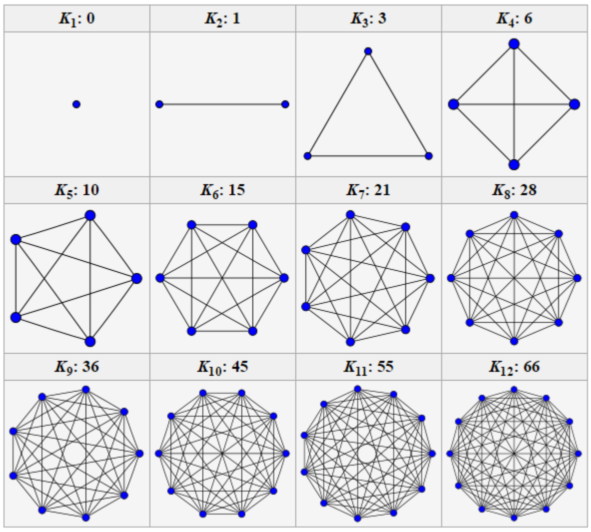
Les arêtes b et c sont incidentes, les arêtes a et g sont indépendantes. Les sommets A et B sont voisins mais pas B et C. Le graphe ne comporte ni boucle ni sommet isolé.
G est un multigraphe car il comporte plusieurs arêtes multiples (a et b, d et e) mais il n'est pas complet car B et C ne sont pas voisins.
L'ordre du graphe G est 4. Le voisinage de A est $\{B, C, D\}$. Le degré A est 5.

- **Les graphes K_n**

Ils sont désignés par la lettre K en hommage à **Kazimierz Kuratowski** (1896-1980), un des pères de la théorie des graphes.
Soit $n \in N^*$, K_n désigne le graphe simple, complet et non orienté à n sommets. Le nombre d'arêtes égale

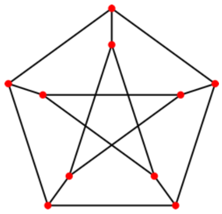
$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Le degré de chacun des sommets est $n - 1$



- **Le graphe de Peterson**

Il possède des propriétés remarquables dont on peut avoir l'aperçu sur cette **page** de Wikipédia.



- Cette **page** de Wikipédia recense la plupart des graphes remarquables.

III. Premiers résultats

Propriété 1
Dans un graphe simple d'ordre $n \geq 2$, il existe au moins deux sommets de même degré.

Preuve
Soit un graphe simple d'ordre $n \geq 2$. On en déduit que le degré de chaque sommet est dans l'intervalle $[\![1; n - 1]\!]$ qui comporte $n - 1$ valeurs. Le graphe comprenant n sommets, au moins deux sommets sont nécessairement de même degré.

Théorème 1 (formule d'Euler, dite des poignée de mains)
Dans un graphe, la somme des degrés des sommets égale le double du nombre d'arêtes.

Preuve
Soit un graphe G. Chaque arête est incidente à deux sommets. On en déduit directement la formule d'Euler.

Corollaire 1
Dans un graphe, le nombre de sommets de degrés impairs est pair.

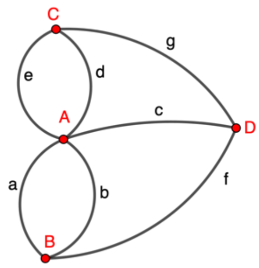
Preuve
Soit un graphe G. D'après la forme d'Euler, la somme des degrés des sommets est paire. La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est impaire donc, pour respecter la parité, il est nécessaire qu'il y ait un nombre pair de sommets de degrés impairs.

Exemple
Dans un tournoi à 7 équipes, on veut que chaque équipe dispute 3 matchs avant les phases finales.
Est-ce possible ?
Solution
Si l'on représente la situation par un graphe où les équipes représentent les sommets et les matchs les arêtes, chaque sommet est de degré 3 donc la somme des degrés égale $7 \times 3 = 21$ ce qui contredit la formule d'Euler. Un tel fonctionnement est donc impossible.
On aurait pu aussi utiliser le corollaire 1 car on aurait alors un nombre impair de sommets de degrés impairs, ce qui est impossible.

IV. Chaînes et chemins dans un graphe

Définition 4
Soit un graphe G. Soient x et y des sommets de G.
Une **chaîne** (ou **chemin** dans un graphe orienté) reliant x à y est une liste d'arêtes incidentes consécutivement reliant x à y. Elle est **fermée** lorsque sommet initial et sommet final coïncident.
Une chaîne est **simple** si elle ne passe jamais deux fois sur la même arête.
Une chaîne est **élémentaire** si elle ne passe jamais deux fois par le même sommet.
La **longueur** d'une chaîne le nombre d'**arêtes** qui la composent.
La **distance** entre deux sommets d'un graphe est la longueur minimale obtenue en considérant toutes les chaînes reliant deux sommets.
Un **cycle** (ou **circuit** dans un graphe orienté) est un chaîne simple fermée.

Exemple



Dans l'exemple des ponts de Königsberg, (a, b, c, g, g, f, a) est une chaîne fermée de longueur 7 reliant A à lui-même. Pour éviter des confusions pour la chaîne (a, b) par exemple, on intercalera parfois les sommets du chemin dans la notation. On notera ainsi (A, a, B, b, A) ou (B, a, A, b, B) au lieu de de (a, b).
La distance entre A et B est 1, celle entre B et C vaut 2.
(a, b, c, g, e) est un cycle reliant A à lui-même.
Il n'existe pas de cycle contenant toutes les arêtes dans cet exemple (on le montrera plus tard).

Définition 5
Un graphe est **connexe** s'il existe une chaîne reliant reliant chaque sommet du graphe.

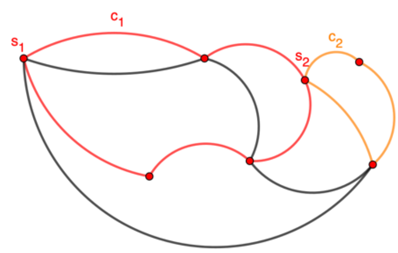
Définition 6
Une **chaîne eulérienne** est une chaîne simple contenant toutes les arêtes du graphe.
Un **cycle eulérien** est une chaîne eulérienne fermée.
Un graphe est **eulérien** s'il contient au moins un cycle eulérien.

Théorème d'Euler (1766)
Soit G un graphe connexe non orienté.
G est un graphe eulérien si et seulement si tous les sommets sont de degré pair.

Preuve
Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe.
On raisonne par double implication.

Sens direct
On suppose que G possède un cycle eulérien. Soit $z \in V$. z est un sommet du cycle eulerien. On en déduit que pour chaque arête incidente à z, il existe donc une arête distincte incidente à z : la chaîne passe par une arête pour relier z et doit la quitter par une arête distincte qui n'a jamais été utilisée auparavant. En ce qui concerne le premier sommet de la chaîne, la parité du degré est liée au fait que l'arête reliant le premier sommet au suivant est incidente à la dernière arête. On en déduit que le degré de z est pair.

Sens direct
On suppose maintenant que
$$\forall z \in V, d(z) \in 2N^*$$
Soit s_1 un sommet du graphe G. G est connexe donc il existe un cycle c_1 reliant s_1 à lui-même. Si le cycle est eulérien, le processus s'arrête. Sinon, on considère un sommet s_2 du cycle c_1 relié à un sommet par une arête e_2 qui n'est pas dans c_1. On peut alors trouver un cycle c_2 contenant e_2 qui relie s_2 à lui-même et qui n'utilise aucune arête du cycle c_1 (en effet, si l'on supprime les arêtes de c_1, les degrés des sommets restent pairs). Ainsi, en ajoutant au cycle c_1 le cycle c_2 (on embranche le cycle c_2 au sommet s_2), on obtient un cycle de longueur strictement supérieure. En répétant cette opération autant que nécessaire, vu que le nombre d'arêtes est fini, on obtient finalement un cycle eulérien.



Corollaire du théorème d'Euler
Soient $G = (V, E)$ un graphe connexe non orienté et $A, B \in V$ distincts. G possède une chaîne eulérienne reliant les deux sommets A et B si et seulement si les degrés de ces deux sommets sont les seuls à être de degrés impairs.

Preuve
Soient $G = (V, E)$ un graphe connexe et $A, B \in V$ distincts. On raisonne par double implication.

- **Sens direct : G possède une chaîne eulérienne reliant les deux sommets A et B**

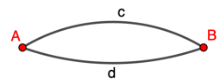
Si l'on ajoute une arête e qui relie A et B, on obtient un graphe possédant un cycle eulérien. D'après le théorème d'Euler, tous les sommets de ce nouveau graphe sont de degrés pairs. Donc, dans le graphe initial G, A et B sont de degrés impairs alors que tous les autres sommets sont de degrés pairs.

- **Sens indirect : A et B sont de degré impair.**

Si l'on ajoute une arête e qui relie A et B, on obtient un graphe dont tous les sommets sont de degrés pairs. Ainsi, on peut appliquer le théorème d'Euler et affirmer qu'il existe un cycle eulérien dans ce graphe. A et B étant alors voisins, on peut commencer le cycle en A et le finir en B pour revenir en A. En supprimant alors l'arête e, on obtient alors une chaîne eulérienne reliant A à B.

Remarques

- Dans le cas où tous les sommets sont de degrés pairs, il existe toujours une chaîne eulérienne passant par deux points distincts (d'après le théorème d'Euler) mais aucune chaîne eulérienne dont les extrémités sont distinctes. Dans le graphe ci-contre, il n'existe aucune chaîne eulérienne reliant A à B : les seules chaînes eulériennes sont les chaînes (d, c) et (c, d) reliant A à lui-même et les chaînes (c, d) et (d, c) reliant B à lui-même.



- Le problème des ponts de Königsberg est insoluble car les 4 sommets sont de degrés impairs. Ce n'est pas le cas des problèmes des figures 2 et 3 puisque les 2 sommets sont de degré 6 dans la figure 2 et seuls les sommets D et E sont de degrés impairs dans la figure 3. Les solutions du problème 3 débuteront donc en D et finiront en E (ou inversement).

V. Matrice d'adjacence

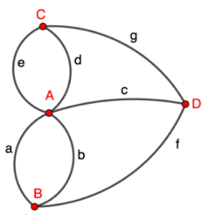
Définition 7
Soient $n \in N^*$ et $G = (V, E)$ un graphe où $V = \{s_i | i \in [\![1, n]\!]\}$.
La matrice $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$ où $a_{i,j}$ désigne le nombre d'arêtes liant le sommet s_i au sommet s_j (en tenant compte de l'éventuelle orientation du graphe) est la **matrice d'adjacence** associée au graphe G.

Remarques

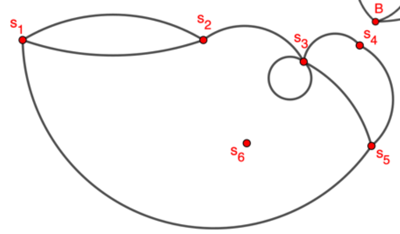
- Soit $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,i}$ est le nombre de boucles distinctes au sommet s_i.
- Si le graphe n'est pas orienté, la matrice A est symétrique
$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], a_{i,j} = a_{j,i}$$
- Si le graphe est orienté, $a_{i,j} = 0$ s'il n'existe aucune arête de s_i vers s_j. La matrice n'est pas nécessairement symétrique.

Exemples

- La matrice d'adjacence du graphe modélisant le problème des ponts de Königsberg est
$$A = (0\ 2\ 2\ 1\ 2\ 0\ 0\ 1\ 2\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0)$$

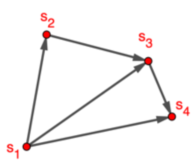


- Soit $n \in N^*$, La matrice d'adjacence de K_n est la matrice de taille $n \times n$ dont tous les coefficients valent 1 sauf ceux de la diagonale qui sont nuls.
- La matrice d'adjacence du graphe non orienté ci-contre est



$$B = (0\ 2\ 0\ 0\ 1\ 0\ 2\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$$

- La matrice d'adjacence du graphe orienté ci-contre est
$$C = (0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0)$$



Théorème 4

Soient $n\in N^*$, $G = (V, E)$ un graphe où $V = \{s_i | i\in[\![1, n]\!]\}$ et $A = (a_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$ sa matrice d'adjacence.

Soient $p\in N^*$ et $M = A^p = (m_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$

$m_{i,j}$ est le nombre de chemins de longueur p reliant s_i à s_j.

Preuve

On utilise les notations du théorème et montrons par récurrence la proposition $P(p)$

« $m_{i,j}$ est le nombre de chemins de longueur p reliant s_i à s_j. »

Initialisation

Par définition, $P(1)$ est vraie

Hérédité

Soit $p \in N^*$ tel que $P(p)$ soit vraie. Montrons $P(p + 1)$.

$$A^{p+1} = MA = \left(\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}a_{k,j}\right)_{i,j\in[\![1,n]\!]}$$

$m_{i,k}$ est le nombre de chemins de longueur p reliant s_i à s_k.

$a_{k,j}$ est le nombre de chemins de longueur 1 reliant s_k à s_j.

Donc $m_{i,k}a_{k,j}$ est le nombre de chemins de longueur $p + 1$ reliant s_i à s_j sachant que l'on était au sommet s_k à l'avant-dernière étape donc $\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}a_{k,j}$ est bien le nombre de chemins de longueur $p + 1$ reliant s_i à s_j.

Donc $P(p + 1)$ est vraie

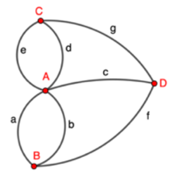
Conclusion

La proposition $P(p)$ est vraie au rang 1 et héréditaire à partir de ce rang donc elle est vraie pour tout entier naturel non nul. Le théorème est ainsi démontré.

Exemples

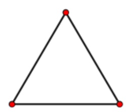
On reprend les graphes et les matrices d'adjacence de l'exemple précédent.

- Il y a ainsi 4 chaînes qui mènent de A à D en 2 étapes et 11 en 3 étapes.



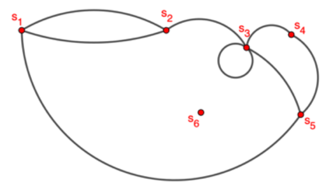
$A = (0\ 2\ 2\ 1\ 2\ 0\ 0\ 1\ 2\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ )$ $A^2 = (9\ 1\ 1\ 4\ 1\ 5\ 5\ 2\ 1\ 5\ 5\ 2\ 4\ 2\ 2\ 3\ )$ $A^3 = (8\ 22\ 22\ 11\ 22\ 4\ 4\ 11\ 22\ 4\ 4\ 11\ 11\ 11\ 11$

- Pour K_3, il y a 3 chaînes de longueur 3 menant d'un sommet à un autre et 5 chaînes de longueur 4.



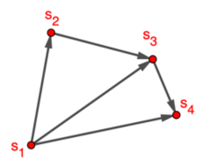
$K = (0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ )$ $K^2 = (2\ 1\ 1\ 1\ 2\ 1\ 1\ 1\ 2\ )$ $K^3 = (2\ 3\ 3\ 3\ 2\ 3\ 3\ 3\ 2\ )$ $K^4 = (6\ 5\ 5\ 5\ 6\ 5\ 5\ 5\ 6\ )$

- Il y a 9 chaînes de longueur 3 menant de s_1 à s_5



$B = (0\ 2\ 0\ 0\ 1\ 0\ 2\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ )$ $B^2 = (5\ 0\ 3\ 1\ 0\ 0\ 0\ 5\ 1\ 1\ 3\ 0\ 3\ 1\ 4\ 2\ 2\ 0\ 1\ 1\ 2\ 2$

- Le seul chemin de longueur 3 mène de s_1 à s_4. Il n'y a aucun chemin de longueur 4.



$C = (0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ )$ $C^2 = (0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ )$ $C^3 = (0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ )$ $C^4 = 0$