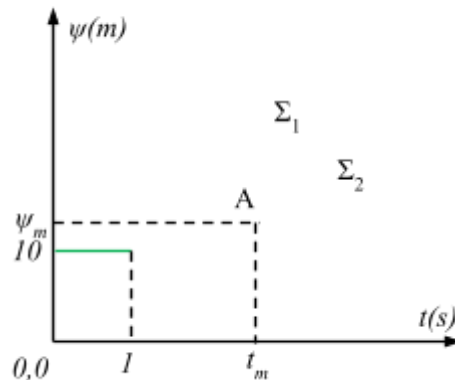


Δύο σώματα σε ελεύθερη πτώση και ένα διάγραμμα

Το διπλανό διάγραμμα θέσης – χρόνου αναφέρεται σε δύο μικρές σφαίρες Σ_1 και Σ_2 , με μάζες m_1 και $m_2 > m_1$, που βρίσκονται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο και αφήνονται να εκτελέσουν ελεύθερη πτώση, απουσία αέρα, παράλληλα σε έναν κατακόρυφο άξονα $\Psi'\Psi$, με θετική φορά προς τα κάτω. Η επιτάχυνση της βαρύτητας έχει μέτρο $g = 10\text{m/s}^2$.



α) Ποιες είναι οι αρχικές συνθήκες (t_{01} , ψ_{01} , t_{02} , ψ_{02}) εκτέλεσης του πειράματος;

Σχεδιάστε έναν βαθμολογημένο άξονα $\Psi'\Psi$, και τοποθετήστε σχετικά με αυτόν τις σφαίρες τη χρονική στιγμή $t = 0$, σχεδιάζοντας και τις δυνάμεις, που ασκούνται.

β) Γράψτε τις εξισώσεις θέσης – χρόνου των σφαιρών στο S.I.

γ) Τι εκφράζουν οι συντεταγμένες του σημείου τομής Α των δύο γραφικών παραστάσεων; Υπολογίστε τις τιμές t_m και ψ_m .

δ) Να γράψετε τη χρονική εξίσωση που δίνει κάθε στιγμή την απόσταση των δύο σφαιρών και να κάνετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση σε βαθμολογημένους άξονες.

στ) Πότε η απόσταση των σφαιρών θα γίνει $d = 20\text{m}$;

Απάντηση

α) Από το διάγραμμα παίρνουμε:

Για τη σφαίρα Σ_1 : $t_{01} = 0\text{s}$, $\psi_{01} = 0\text{m}$

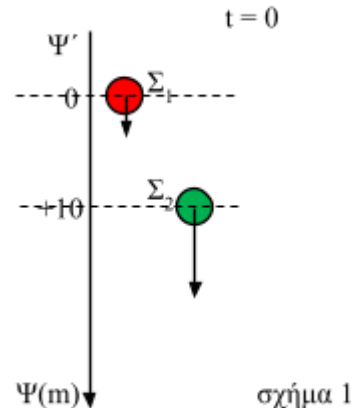
Για τη σφαίρα Σ_2 : Ηρεμεί από 0 ως 1s και αμέσως μετά ξεκινάει να κινείται. Άρα $t_{02} = 1\text{s}$, $\psi_{02} = +10\text{m}$

Τι μας λένε αυτές οι τιμές;

Η σφαίρα Σ_1 βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t = 0$, στην αρχή $\psi = 0$ του άξονα $\Psi'\Psi$.

Η σφαίρα Σ_2 βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t = 0$, 10m πιο χαμηλά.

Αφού $m_2 > m_1 \Leftrightarrow m_2 g > m_1 g \Leftrightarrow W_2 > W_1$



Όλα αυτά φαίνονται στο σχήμα 1.

β) Για τη σφαίρα Σ_1 : $\psi_1 = \psi_{01} + \frac{1}{2} g(t - t_{01})^2 \Leftrightarrow \psi_1 = 0 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (t - 0)^2 \Leftrightarrow$

$$\psi_1 = 5t^2 \quad (\text{S.I.}) \quad t \geq 0\text{s} \quad (1)$$

Για τη σφαίρα Σ_2 :

$$\psi_2 = +10\text{m}, \quad 0\text{s} \leq t < 1\text{s} \quad (2) \text{ και}$$

$$\psi_2 = \psi_{02} + \frac{1}{2} g(t - t_{02})^2 \Leftrightarrow \psi_2 = 10 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (t - 1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\psi_2 = 10 + 5(t-1)^2 \text{ (S.I.) } t \geq 1s \quad (3)$$

γ) Το σημείο τομής Α εκφράζει το γεγονός ότι θα υπάρξει στιγμή t_m , που οι δύο σφαίρες θα βρεθούν στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και η Σ_1 στη συνέχεια θα προσπεράσει τη Σ_2 . Οι συντεταγμένες του Α(t_m, ψ_m), αντιστοιχούν στη χρονική στιγμή t_m και τη θέση ψ_m της συνάντησης.

Για να βρούμε αυτές τις τιμές θέτουμε

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \psi_2 \xrightarrow{(1),(3)} 5t_m^2 = 10 + 5(t_m - 1)^2 \Leftrightarrow 5t_m^2 = 10 + 5(t_m^2 - 2t_m + 1) \Leftrightarrow \\ 5t_m^2 &= 10 + 5t_m^2 - 10t_m + 5 \Leftrightarrow 10t_m = 15 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$t_m = 1,5s$$

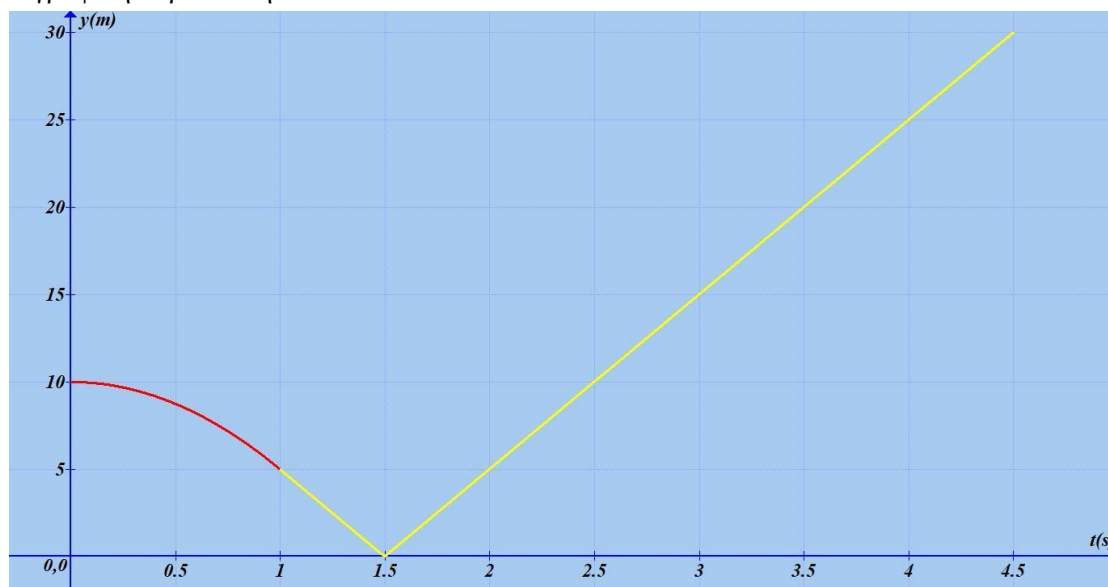
Από την (1) έχουμε $\psi_m = 5 \cdot 1,5^2 \Leftrightarrow$

$$\psi_m = 11,25m$$

δ) Η απόσταση κάθε στιγμή των σφαιρών είναι

- Για $0s \leq t < 1s$, $d = |\psi_1 - \psi_2| \xrightarrow{(1),(2)} d = |5t^2 - 10|$ (S.I.)
- Για $t \geq 1s$, $d = |\psi_1 - \psi_2| \xrightarrow{(1),(3)} d = |5t^2 - [10 + 5(t-1)^2]| \Leftrightarrow$
 $d = |5t^2 - 10 - 5(t^2 - 2t + 1)| \Leftrightarrow d = |5t^2 - 10 - 5t^2 + 10t - 5| \Leftrightarrow$
 $d = |10t - 15|$ (S.I.) (4)

Η γραφική παράσταση θα είναι



Το κόκκινο τμήμα είναι παραβολή και τα κίτρινα τμήματα ευθείες.

ε) Από το διάγραμμα της ερώτησης (δ) βλέπουμε ότι $d = 20m$, όταν $t = 3,5s$.

Η απόσταση θα γίνει $20m$, μετά τη χρονική στιγμή $t = 1s$ και αφού η σφαίρα Σ_1 έχει προσπεράσει τη σφαίρα Σ_2 . Έτσι αν θέσουμε στην (4)

$$\begin{aligned}d = 20 &\Leftrightarrow |10t - 15| = 20 \Leftrightarrow \\ \left. \begin{array}{l} 10t - 15 = 20 \\ 10t - 15 = -20 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 10t = 35 \\ 10t = -5 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} t = 3,5s \\ t = -0,5s \end{array} \right\}\end{aligned}$$

Προφανώς δεκτή είναι η τιμή $t = 3,5s$.

Ανδρέας Ριζόπουλος