

Указания к решению заданий
9 класс (12-летняя школа)

1. Решение. С учётом области определения ($1 \leq x^2 \leq 1$) получаем, что график функции будет состоять из двух точек: (1;0) и (-1;0).

2. Решение I. Пусть ABCD - трапеция, $AB = BC = 1/2 AD$. Рассмотрим точку E - середину AD (см. рис.). Тогда ABCE - параллелограмм, так как AE и BC равны и параллельны. Поэтому $EC = AB = 1/2 AD$. Следовательно, в треугольнике ACD медиана CE равна половине стороны AD, к которой она проведена. Поэтому, $\angle ACD$ равен 90° .

Решение II. Достроим трапецию ABCD до параллелограмма ABMD. Тогда $\angle ABC + \angle CMD = 180^\circ$. Поскольку треугольники ABC и CMD - равнобедренные, то $\angle BCA = 90^\circ - \angle ABC/2$ и $\angle MCD = 90^\circ - \angle CMD/2$, следовательно, $\angle BCA + \angle MCD = 180^\circ - (\angle ABC + \angle CMD)/2 = 90^\circ$.

Решение III. Достроим трапецию до треугольника AFD. Поскольку $BC:AD=1:2$, то и $BF:AF=FC:FD=1:2$, следовательно, BC - средняя линия этого треугольника. Также $\angle CAD = \angle BCA = \angle BAC$, то есть, AC - биссектриса и медиана треугольника AFD, следовательно, она является и высотой.

3. Решение. Если разностью двух чисел является число, записываемое двумя одинаковыми цифрами, то эта разность делится без остатка на число 11. Чтобы это выполнялось, среди выписанных должны быть обязательно два числа, имеющие одинаковые остатки от деления на 11. Так как существует 11 различных остатков от деления различных натуральных чисел на 11, то (по принципу Дирихле) необходимо выписывать 12 чисел.

Ответ. 12 чисел.

4. Решение. Используя неравенство треугольника $a+b>c$ и то, что $a^2-ab+b^2 \geq 0$, получаем цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} a^3+b^3+3abc &= (a+b)(a^2-ab+b^2)+3abc > \\ &> c(a^2-ab+b^2)+3abc = c(a^2+2ab+b^2) = c(a+b)^2 > c \cdot c^2 = c^3. \end{aligned}$$

5. Ответ: например, 1111111613 и др.

Решение. Сначала найдём какое-нибудь число, удовлетворяющее условию задачи, не обязательно десятизначное. Например, попробуем найти такое число, что после прибавления к нему произведения цифр они попросту меняются местами. Если последние цифры числа - 13, то, чтобы поменять их местами, нужно прибавить 18. Чтобы произведение цифр было 18, нужно дописать ещё цифру 6. Искомым является число 613: $613+6 \cdot 1 \cdot 3=631$. Другие аналогичные числа: $326+3 \cdot 2 \cdot 6=362$, $819+8 \cdot 1 \cdot 9=891$ и т. п.

В наименьшем известном примере - $28+2 \cdot 8=44$ - цифры изменяются, однако их произведение сохраняется! Другой пример: $214+2 \cdot 1 \cdot 4=222$.

Теперь, чтобы получить десятизначное число, припишем слева недостающее число единиц. Произведение цифр от этого не изменится. Например, $1111111613+18=1111111631$. Также можно приписать в начало и конец равное число двоек и пятёрок, например, $5555282222+10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 16=5555442222$.

Другие интересные примеры, встретившиеся в работах школьников: 1111159121, 1111954511, 1111332123, 1111113148, 2356478911, 1111553431, 1952219522, 1231451671, 3355211211, 5132486791 и др.