

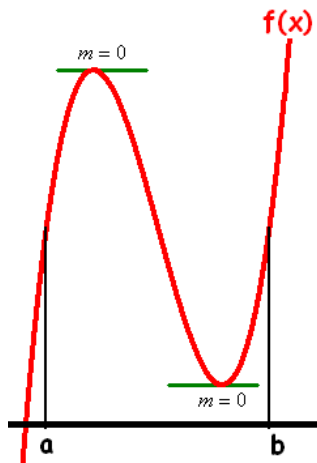
Teorema de monotonía

Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Supongamos que $f'(t_0) > 0$ en un punto t_0 interior. Entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(s) < f(t_0) < f(t)$ cuando $s \in (t_0 - \delta, t_0)$ y $t \in (t_0, t_0 + \delta)$, es decir, es creciente en t_0 . Análogamente si $f'(t_0) < 0$, es decreciente en t_0 .

Teorema de Rolle

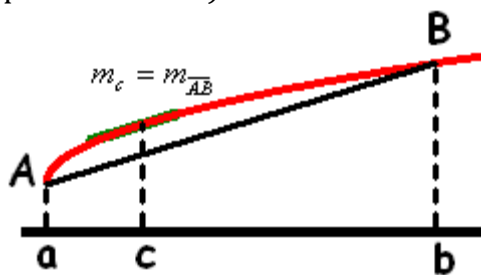
Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) tal que $f(a) = f(b)$.

Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$



La idea del teorema de Rolle es que una curva continua y sin “picos” que toma los mismos valores en los extremos de un intervalo, necesariamente tiene algún punto con tangente horizontal.

En este ejemplo la función $f(x)$ que es continua y sin “picos” y toma los mismos valores en los extremos del intervalo $[a, b]$ tiene dos puntos del intervalo en los que la tangente a la curva es horizontal (o sea de pendiente cero).



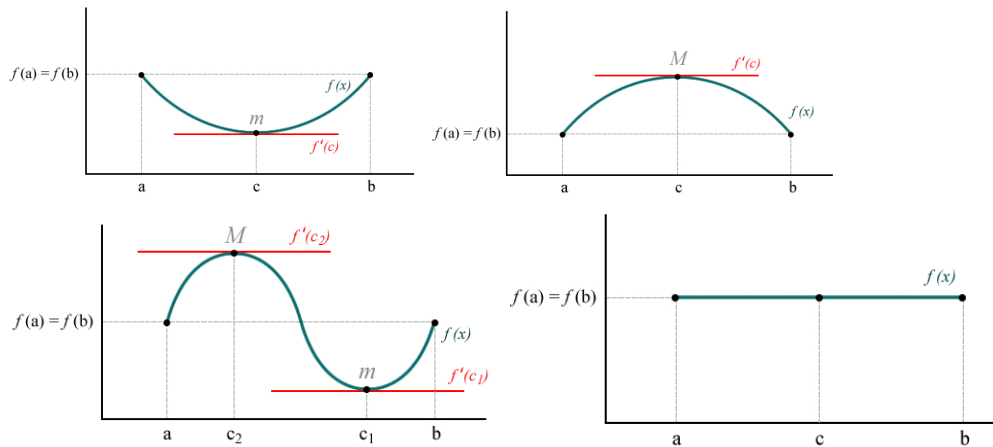
La idea del teorema del valor medio es que en una curva continua y sin “picos” que va del punto A al punto B, hay algún punto intermedio en el que la tangente a la curva en dicho punto es paralela al segmento AB.

(Es decir, tienen la misma pendiente)

Sea f una función que verifica las siguientes hipótesis:

- a) Es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$
- b) Es derivable en el intervalo abierto (a, b)
- c) Toma el mismo valor en los extremos del intervalo, es decir $f(a) = f(b)$

Entonces, existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$, es decir, con tangente horizontal.



Demostración:

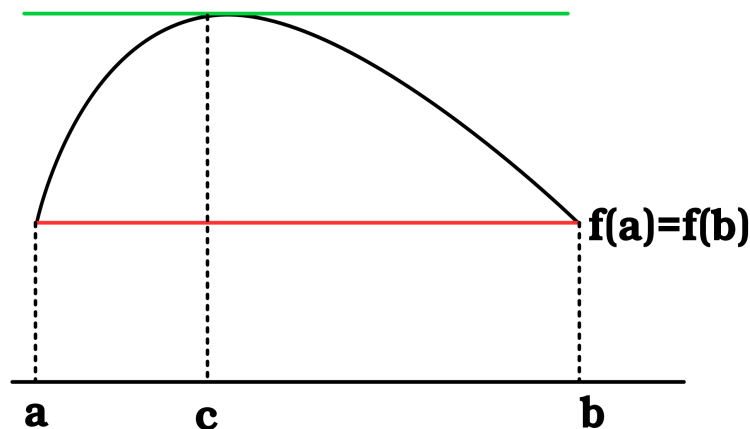
Como f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ alcanza en dicho intervalo un valor máximo y otro mínimo. (Teorema de Weierstrass)

Pueden darse dos casos:

- ① Si el máximo y el mínimo están en los extremos, estos son iguales, ya que $f(a) = f(b)$. Entonces se trata de una función constante y, por tanto, $f'(c) = 0$
- ② Si el valor máximo o mínimo se encuentran en un punto c de (a, b) la función alcanza un máximo y un mínimo (teorema de Weierstrass) y como f es derivable en c , se cumple que $f'(c) = 0$

Interpretación geométrica

Si una función verifica las hipótesis del teorema de Rolle, existe al menos un punto c del intervalo abierto (a, b) donde la tangente a la curva en ese punto $(c, f(c))$ es paralela al eje de abscisas.



Actividades

La función $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 4x + 11$ verifica las siguientes hipótesis:

- a) Es continua en $[1, 3]$ por ser polinómica
- b) Es derivable en $(1, 3)$ por ser polinómica.
- c) $f(1) = 8$; $f(3) = 8$

Entonces existe un punto c en el intervalo abierto (a, b) con derivada nula en dicho punto. Veamos:

$$f'(x) = 2x - 4; \quad f'(c) = 2c - 4 = 0 \Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2$$

El punto c está en el interior del intervalo.

Aplicando el teorema de Rolle, demuestra que $x^3 - 3x + b = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $[-1, 1]$ cualquiera que sea el valor de b (hazlo por reducción al absurdo: supón que hay dos raíces en $[-1, 1]$).

La función $f(x) = x^3 - 3x + b$ es continua en $[-1, 1]$ (es un polinomio).

Es derivable en $[-1, 1]$ y su derivada es $f'(x) = 3x^2 - 3$.

Si calculamos donde se anula la derivada, $(f' = 0) \quad 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

Veamos pues, que $x^3 - 3x + b = 0$ no puede tener más de una raíz en $[-1, 1]$

Supongamos que $f(x) = x^3 - 3x + b$ tiene dos raíces a_1 y a_2 en $[-1, 1]$ es decir

$$f(a_1) = f(a_2) = 0$$

Rolle: $\left. \begin{array}{l} f \text{ continua en } [-1, 1] \\ f \text{ derivable en } (-1, 1) \\ f(a_1) = f(a_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{existe al menos un } c \in (a_1, a_2) \text{ tal que } f'(c) = 0$

Pero sabemos que f' se anula en $\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ que no están incluidos en (a_1, a_2) puesto que $-1 \leq a_1, a_2 \leq 1$, hemos llegado a una contradicción.

Por tanto $x^3 - 3x + b = 0 \quad \forall b$ como máximo tiene una raíz en $[-1, 1]$.

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $\mathbb{R}$; sean a y b dos raíces de la derivada $f'(x)$ tales que entre ellas no hay ninguna otra raíz de $f'(x)$. Razonar debidamente si puede ocurrir cada una de las siguientes posibilidades:

- 1.- Entre a y b no existe ninguna raíz de $f(x)$
- 2.- entre a y b existe una sola raíz de $f(x)$
- 3.- entre a y b existen dos o más raíces de $f(x)$.

Determina si las siguientes funciones satisfacen en el intervalo dado, las hipótesis del Teorema de Rolle.

En caso afirmativo calcula el valor intermedio " c " que verifica la conclusión del mismo.

$$a) f(x) = x^{2/3} \text{ en el intervalo } [-2, 2] \quad b) f(x) = 2|x| - x^2 \text{ en el intervalo } [-1, 1]$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2, & \text{si } -1/2 \leq x < 1 \\ 5 - (x - 2)^2, & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Comprueba que la función cumple las hipótesis del Teorema de Rolle.

Averigua dónde cumple la tesis

Calcula b para que la función $f(x) = x^3 - 4x + 3$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, b]$. ¿Dónde se cumple la tesis?

Demuestra que la función $f(x) = \ln(-\cos x)$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo

$$I = \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right]$$

y halla el valor de c que predice dicho teorema. Averigua, después si cumple esas hipótesis

en el intervalo $I = \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3} \right]$. Si la respuesta es negativa, ¿puede afirmarse que la derivada no se anula en ningún punto del interior de dicho intervalo? Razona las respuestas.

Determina si las siguientes funciones satisfacen en el intervalo dado, las hipótesis del Teorema de Rolle. En caso afirmativo calcula el valor intermedio "c" que verifica la conclusión del mismo.

a) $f(x) = x - x^3$ en el intervalo $[-1, 1]$ b) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ en el intervalo $[-2, -1]$

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \ln x + 3x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

c) $f(x) = x^2 - 4x + 11$ en $[1, 3]$ d) en el intervalo $[0, e]$

Sol.: a) Sí; $c_1 = \frac{-\sqrt{3}}{3}$; $c_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$; b) No; c) Sí; $c=2$; d) No

La función $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ toma el mismo valor en los extremos del intervalo. Encontrar su derivada y comprobar que no se anula nunca. ¿Contradice esto el teorema de Rolle?

Sol.: No, porque no es derivable en $(-1,1)$ al no ser derivable en $x=0$

¿Se puede aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x - 2}$ en el intervalo $[0, 4]$?

Razona la respuesta. Sol.: No, porque no es continua (ni derivable) en $x=2$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + mx + n, & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ px + 1, & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Sea la función $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

(a) Determina m, n y p sabiendo que f es continua en el intervalo cerrado $[0, 4]$, derivable en el intervalo abierto $(0, 4)$ y que $f(0) = f(4)$. Sol.: $m=-3$, $n=5$, $p=1$

(b) Según el teorema de Rolle, ¿en qué punto del intervalo se anula la derivada de la función?

Sol.: En $c = \frac{3}{2}$

Se considera la función $f(x) = e^x$ y los puntos del plano A(0, 1) y B(1, e). Razónese que existe algún punto de la gráfica de f en el que la recta tangente es paralela a la recta AB y hállese dicho punto

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + nx & \text{si } x < -2 \\ x^3 + m & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

Se considera la función

a) Determina m y n para que se cumplan las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-4, 2]$
b) Halla los puntos del intervalo cuya existencia garantiza el teorema.

Utilizando el teorema del valor medio de Lagrange demostrar que:

a) Para cualesquiera números reales $a < b$, se verifica que $\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a \leq b - a$

$$\operatorname{arctg}(2x) - \operatorname{arctg}(x) < \frac{x}{1+x^2}$$

b) Para $x > 0$,

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables para todo valor de x , que verifican que $f(0) = g(0)$ y que $f'(x) > g'(x)$ para $x \geq 0$. ¿Se puede asegurar que $f(x) > g(x)$ para $x > 0$? Razona la respuesta indicando en que resultados de basas.

Determina si las siguientes funciones satisfacen en el intervalo dado, las hipótesis del teorema del valor medio de Lagrange. En caso afirmativo, calcula el valor intermedio "c" que verifica la conclusión del mismo.

a) $f(x) = 3x^2$ en $[0, 4]$

b) $f(x) = (x-2)^2(x+1)$ en $[0, 4]$

c) $f(x) = 3 - \frac{6}{x}$, en $[2, 6]$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2}, & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en $[0, 2]$

Sol.: a) Sí, $c=2$ b) Sí, $c=\frac{3+\sqrt{21}}{3}$ c) Sí, $c=\pm 2\sqrt{3}$ d) Sí, $c_1=\frac{1}{2}$, $c_2=\sqrt{2}$

$$f(x) = \begin{cases} ax-3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2+10x-b & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Calcula a y b para que

cumpla las hipótesis del teorema del valor medio

en el intervalo $[2, 6]$. ¿Dónde cumple la tesis? Sol.: $a=2$, $b=19$; Valor intermedio: $c=\frac{9}{2}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2+10x-19 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

¿Cumple la función

las hipótesis del teorema del valor medio en $[2, 6]$?

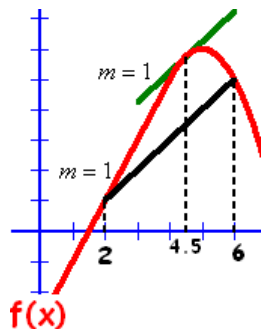
¿En qué punto cumple la tesis?

A) f continua en $[2, 6]$, efectivamente pues es continua en $x=4$ ya que

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (2x-3) = 5 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (-x^2+10x-19) = 5$$

B) f derivable en $(2, 6)$, su función derivada en $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$ es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 4 \\ -2x+10 & \text{si } x > 4 \end{cases} \quad \text{Para } x=4 \quad f \text{ es derivable: } (f'(4)=2) \text{ ya que:}$$



$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (2) = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (-2x + 10) = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continua en } [2,6] \\ f \text{ derivable en } (2,6) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (2,6) / f'(c) = \frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = 1$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 4 \\ -2x + 10 & \text{si } x > 4 \end{cases} \Rightarrow 1 = -2c + 10 \rightarrow c = \frac{9}{2} = 4,5$$

La función $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ toma el mismo valor en los extremos del intervalo, Encontrar su derivada y comprobar que no se anula nunca. ¿Contradice esto el teorema de Rolle?

¿Puedes afirmar que la función $f(x) = x^3 + 2$ se anula en algún punto del intervalo $[-2, -1]$? Encuentra un intervalo de longitud 0,5 en el que $f(x)$ se anule en algún punto.

Determine si las siguientes funciones satisfacen en el intervalo dado, las hipótesis del Teorema de Rolle. En caso afirmativo determine el valor intermedio "c" que verifica la conclusión del mismo.

a. $f(x) = x - x^3$ en el intervalo $[-1, 1]$

b. $f(x) = x^{2/3}$ en el intervalo $[-2, 2]$

c. $f(x) = 2|x| - x^2$ en el intervalo $[-1, 1]$

d. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \ln x + 3x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en el intervalo $[0, e]$

Comprueba que la función $f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 5 - (x - 2)^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$ cumple las hipótesis del Teorema de Rolle. Averigua dónde cumple la tesis.

¿Se puede aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x - 2}$ en el intervalo $[0, 4]$? Razona la contestación.

¿Es posible aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = \ln(1 + x^2)$ en el intervalo $[-1, 1]$? ¿Y a la función $f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}$ en el mismo intervalo?

Comprobar si la función $f(x) = |x - 3|$ verifica el teorema de Rolle en $[1, 5]$

Comprueba si se verifica el teorema de Rolle para la función $f(x) = x^2 - 4x + 11$, en el intervalo $[1, 3]$.

Calcula b para que la función $f(x) = x^3 - 4x + 3$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, b]$. ¿Dónde se cumple la tesis?

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{si } x < 1 \\ \frac{x^2}{x+2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Determinar las constantes a, b y c para que la función verifique las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, c]$, con $c > 1$. Hallar también el punto o puntos que garantiza dicho teorema

Comprobar si $f(x) = \ln(\cos x)$ verifica el teorema de Rolle en $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$

Demuestra que la función $f(x) = \ln(-\cos x)$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo

$I = \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$ y halla el valor de c que predice dicho teorema. Averigua, después si cumple esas hipótesis

en el intervalo $I = \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right]$. Si la respuesta es negativa, ¿puede afirmarse que la derivada no se anula en ningún punto del interior de dicho intervalo? Razona las respuestas.

Demostrar que la ecuación $x + e^{-x} = 1$ tiene una sola raíz

Demostrar que la ecuación $\cos x = x$ tiene una sola solución en el intervalo $[0, \pi]$

Probar que la ecuación $x^3 - 3x + 40 = 0$ tiene alguna raíz real y localizarla.

¿Es cierto que la ecuación $x^5 - 3x = 1$ tiene al menos una raíz comprendida entre 1 y 2? Razónese la respuesta y enúnciese el resultado que se utiliza en su resolución.

Si el término independiente de un polinomio en x es igual a -5 y el valor que toma el polinomio para $x = 3$ es 7, razonar que hay algún punto del intervalo $[0, 3]$ en el que el polinomio toma el valor 2.

Se puede afirmar que la ecuación $\sin x + 2x - 1 = 0$ tiene al menos una raíz real? Si la respuesta es afirmativa, hallar un intervalo en el cual se encuentre dicha raíz.

Para cada número real m, se considera la ecuación $3x^5 - 25x^3 + 60x + m = 0$

Discute, según el valor de m, cuantas soluciones reales (raíces reales) tiene esta ecuación.

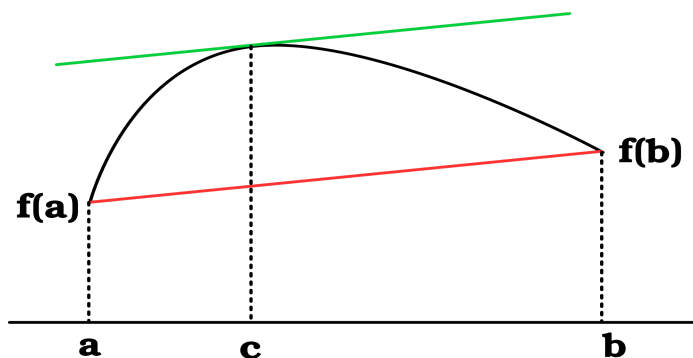
Teorema del valor medio de Lagrange

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Interpretación geométrica

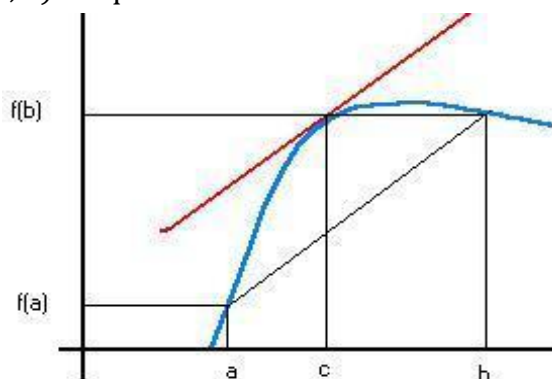
Si una función está en las hipótesis del teorema del valor medio, existe un punto $(c, f(c))$ de la curva, donde la recta tangente a la curva en dicho punto es paralela a la cuerda de extremos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.



Sea f una función que verifica las siguientes hipótesis:

- Es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$
- Es derivable en el intervalo abierto (a, b)

Entonces, existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$



Interpretación geométrica: Existe un punto en la curva cuya tangente es paralela a la cuerda.

Demostración:

Formamos la función $h(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x - f(x)$ y aplicamos el teorema de Rolle ya que:

- Es continua en $[a, b]$ por serlo f .
- Es derivable en (a, b) por serlo f .

Además $h(a) = \frac{af(a) - af(b)}{b - a} - f(a) = \frac{af(a) - af(b) - bf(a) + af(a)}{b - a} = \frac{af(b) - bf(a)}{b - a}$

y $h(b) = \frac{bf(b) - bf(a)}{b - a} - f(b) = \frac{bf(b) - bf(a) - bf(b) + af(b)}{b - a} = \frac{af(b) - bf(a)}{b - a}$

es decir, $h(a) = h(b)$

Como se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle, existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $h(c) = 0$, por tanto,

$$\text{si } h'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(x),$$

$$h'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(c) = 0 \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Ejemplo:

La función $f(x) = 3x^2$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, podemos encontrar un punto, por ejemplo, en el intervalo $(0, 4)$ cuya tangente a la curva sea paralela a la cuerda que une los puntos de abscisas

$$x = 0; x = 4.$$

$$f(x) = 3x^2; f'(c) = 6c \quad f(0) = 0; f(4) = 48$$

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} \Rightarrow 6c = \frac{48 - 0}{4 - 0} \Rightarrow 6c = 12 \Rightarrow c = 2$$

Consecuencias del teorema del v.m.

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Entonces

- si $f'(t) \geq 0$ para todo $t \in (a, b)$ entonces f es monótona creciente en $[a, b]$.
- si $f'(t) \leq 0$ para todo $t \in (a, b)$ entonces f es monótona decreciente en $[a, b]$.
- si $f'(t) = 0$ para todo $t \in (a, b)$ entonces f es constante en $[a, b]$.

Si f y g son funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) tales que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$, entonces existe un número real " c " tal que $f(x) = g(x) + c$ para todo $x \in [a, b]$; es decir, las dos funciones f y g se diferencian en una constante.

Actividades

Se considera la función $f(x) = e^x$ y los puntos del plano $A(0, 1)$ y $B(1, e)$. Razónese que existe algún punto de la gráfica de f en el que la recta tangente es paralela a la recta AB y hállese dicho punto.

Prueba que las funciones satisfacen las hipótesis del teorema del valor medio de Lagrange en los intervalos que se indican y calcula el o los valores vaticinados por el teorema.

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \text{ en el intervalo } [-2, -1]$$

$$f(x) = (x - 2)^2(x + 1) \text{ en el intervalo } [0, 4]$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3 - x^2}{2} & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

en el intervalo $[0, 2]$

$$f(x) = \sqrt{25 - x^2} \quad \text{en el intervalo } [3, 6]$$

$$f(x) = \frac{1}{3} - \sqrt[3]{x^4} - x^{4/3} \quad \text{en el intervalo } [0, 3]$$

$$f(x) = 2\ln x \quad \text{en el intervalo } [1, e]$$

$$f(x) = x\sqrt{x+1} \quad \text{en el intervalo } [-1, 0]$$

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)^2} \quad \text{en el intervalo } [-1, 1]$$

$$f(x) = \frac{4-x}{2+x} \quad \text{en el intervalo } [0, 1]$$

$$f(x) = \begin{cases} |x-1| & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ -x^2 + 7x - 10 & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \quad \text{en el intervalo } [1,5]$$

Calcula a y b para que $f(x) = \begin{cases} ax-3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - b & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[2, 6]$. ¿Dónde cumple la tesis?

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + nx & \text{si } x < -2 \\ x^3 + m & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

Determina m y n para que se cumplan las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-4, 2]$
Halla los puntos del intervalo cuya existencia garantiza el teorema.

Hallar, utilizando el Teorema del valor Medio, un valor aproximado de

$$\sqrt[3]{29}$$

$$\sqrt{106}$$

$$\frac{1}{999}$$

$$\sqrt[5]{33}$$

Teorema del valor medio generalizado o de Cauchy

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en $[a, b]$, derivables en (a, b) y tales que sus derivadas no se anulan simultáneamente en ningún punto del intervalo (a, b) .

Si $g(b) \neq g(a)$, entonces, existe, al menos un punto $x_0 \in (a, b)$ tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Demostración:

Nos ayudamos de la función auxiliar $h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)]$

A esta función podemos aplicar el teorema de Rolle ya que

- Es continua en $[a, b]$ por ser diferencia de funciones continuas
- Es derivable en (a, b) por ser derivable de funciones derivables.
- $h(a) = h(b)$

Derivando la función, $h'(x) = f'(x)[g(b) - g(a)] - g'(x)[f(b) - f(a)]$

$$\text{Y si } h'(c) = 0, \quad f'(x)[g(b) - g(a)] - g'(x)[f(b) - f(a)] = 0 \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

(Siempre que $g(b) - g(a) \neq 0$ y $g'(c) \neq 0$)

Ejemplo:

Halla el valor de c del intervalo $(1, 4)$ donde se cumple la tesis del teorema de Cauchy, siendo $f(x) = 3x + 2$ y $g(x) = x^2 + 1$

Las funciones son continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$ por ser funciones polinómicas

$$f'(x) = 3; \quad f'(c) = 3$$

$$g'(x) = 2x ; \quad g'(c) = 2c$$

Valores de las funciones en los extremos del intervalo:

$$f(1) = 5; \quad f(4) = 14$$

$$g(1) = 2; \quad g(4) = 17$$

$$\text{luego } \frac{14-5}{17-2} = \frac{3}{2c} \Rightarrow \frac{9}{15} = \frac{3}{2c} \Rightarrow 18c = 45 \Rightarrow c = \frac{45}{18} = \frac{5}{2}; \quad \frac{5}{2} \in (1,4)$$

Actividades

Determine si las funciones $f(x)$ y $g(x)$, en el intervalo dado, satisfacen las hipótesis del Teorema de Cauchy. En caso afirmativo, determine el valor intermedio "c" que verifica la conclusión del mismo.

$f(x) = x^2 - 2$ $g(x) = 3x^2 + x - 1$ en el intervalo $[0, 4]$

$$f(x) = 2x - 3 \quad g(x) = x^2 + 1 \quad \text{en el intervalo } [1, 4]$$

$$f(x) = 4 - x^2 \quad g(x) = x^3 - 4 \quad \text{en el intervalo } [0, 3]$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x} \quad g(x) = \frac{x+2}{x^2} \quad \text{en el intervalo } [1, 3]$$

$$f(x) = \sqrt{x+5} \quad g(x) = x+3 \quad \text{en el intervalo } [-4, -1]$$

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \quad \text{en el intervalo } [2, 5]$$

Diga si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

- Si en la ecuación de la recta $P(c, f(c))$ y $m = -1$ la ecuación de la recta $y-f(c) = 0$ es la ecuación del Teorema de Rolle.
- En el Teorema de Lagrange la pendiente de la ecuación de la recta secante y tangente son paralelas.
- Si en el Teorema de Cauchy $g(a) = g(b)$, entonces existe $f'(c)/g'(c)$.
- En una función $f(x) = 1/(x-1)$ en $[-2, 2]$ se cumple los teoremas de valor medio.
- En el Teorema de Lagrange la recta secante pasa por $P_1(a, f(a))$ y $P_2(b, f(b))$.
- En el teorema de Rolle la ecuación de la recta secante es $y=f(c)$.
- La ecuación de la recta tangente a la curva $ye^{2x} - 2e^x = 1$, en $x = 0$ es $y = 5x+3$
- Dadas las funciones $h(x)$ y $g(x)$ definidas en $[a, b]$. Si $h(x)$ es continua en $[a, b]$, y $g(x)$ es derivable en (a, b) , entonces se cumplen las hipótesis del teorema de Cauchy.
- Si $f(x) = x^{2/5}$ está definida en $[-1, 2]$, entonces se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle.
- La ecuación de la recta tangente a la curva $y=3x^2$ en el punto $(3, 27)$ es $y - 27 = 18(x - 3)$.
- La función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ satisface las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[1, 2]$
- Si una función satisface las hipótesis del teorema de Lagrange en el intervalo $[a, b]$, también satisface las hipótesis del teorema de Rolle en dicho intervalo.
- Si una función cumple el teorema de Rolle también cumple el teorema de Lagrange.
- Si una función es derivable en el intervalo $[a, b]$, entonces cumple el teorema de Rolle.
- En el teorema de Cauchy es suficiente que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ sean continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) .

DERIVACIÓN DE LEIBNIZ

Regla de la cadena en notación de Leibniz

Si $y=f(t)$, y además $t=g(x)$ son dos funciones diferenciables, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$$

Derive la siguiente función $y = t^2$, $t = x^2 + 2x + 3$

Observo que y es función de t, entonces derivo y con respecto a t, ésta es la variable independiente, es una potencia, por lo tanto:

$$\frac{dy}{dt} = 2t^{2-1} = 2t$$

Observo que t es función de x, entonces derivo t con respecto a x, ésta es la variable independiente:

$$\frac{dt}{dx} = 2x^{2-1} + 2x^{1-1} + 0 = 2x + 2$$

Aplico regla de la cadena, así: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = 2t(2x + 2)$, sustituyendo t, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = 2(x^2 + 2x + 3)(2x + 2)$$

Si se sustituye primero t, y luego se deriva aplicando el procedimiento para función compuesta explicado anteriormente, se llega exactamente al mismo resultado.

1. Utilizando la regla de derivación para funciones compuestas halle la primera derivada de las siguientes funciones. (Sugerencia: sustituya en cada caso para obtener $y=f(x)$ y luego derive)

a. $y = \frac{u-1}{u+1}$, $u = \sqrt{2x}$

b. $y = (1 - \cos^2(u))^3$, $u = \frac{2}{x}$

VARIOS DERIVADAS

$$y = \ln^2(x \operatorname{sen}(x))$$

Derivando:

$$y = 2 \ln(x \operatorname{sen}(x)) \cdot \frac{1}{x \operatorname{sen}(x)} \cdot (1 \cdot \operatorname{sen}(x) + \cos(x) \cdot x)$$

Ordenando:

$$y' = \frac{2 \ln(x \operatorname{sen}(x)) \cdot (\operatorname{sen}(x) + x \cos(x))}{x \operatorname{sen}(x)}$$

a. $y = (1 - 5x)^6$

b. $f(x) = (3x - x^3 + 1)^4$

c. $y = \left(\frac{1}{1+x} \right)^5$

d. $y = 2x^2 \sqrt{2-x}$

e. $f(x) = x \sqrt{3-x^2}$

f. $y = (x-1) \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

g. $z = \frac{w}{\sqrt{1-4w^2}}$

h. $y = \sqrt{1+\sqrt{x}}$

i. $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

j. $y = \left(\frac{x^3-1}{2x^3+1} \right)^4$

k. $y = \ln(x.e^x)$

l. $y = e^{x^2} . 5^{\ln x}$

m. $y = \ln\left(\frac{x^3+7}{x^2}\right)$

n. $y = 2x^3 \ln(x+3)$

o. $y = \frac{5}{\sqrt{e^x+x}}$

p. $y = \frac{1}{4}e^{x^2} + 5\ln(1-2x^3)$

q. $y = \pi^{\left(\frac{x^2}{x+1}\right)} . 5^{\sqrt{\ln(x)}}$

r. $y = \ln^2(\lg(x^3))$

La derivada de la función $f(x) = x^x - 5$ se anula en al menos un punto del intervalo

a) (1, 5) b) [5, 10] c) Ninguna de las anteriores.

Se sabe que $y = f(x)$ e $y = g(x)$ son dos curvas crecientes en $x = a$. Analícese si la curva $y = f(x) - g(x)$ ha de ser entonces creciente en $x = a$. (Si la respuesta es afirmativa, justifíquese; en caso contrario, dese un contraejemplo que lo confirme).

Aplicando la definición de derivada, demostrar que si f es derivable y periódica, de periodo T , entonces su derivada f' también es periódica de periodo T .

¿Hay alguna función $f(x)$ que no tenga límite cuando $x \rightarrow 2$ y que, sin embargo, $[f(x)]^2$ si tenga límite cuando $x \rightarrow 2$? Si la respuesta es afirmativa, póngase un ejemplo, si es negativa, justifíquese.

Dibújese la gráfica de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, que cumpla las siguientes condiciones:

$$f'(0) = 0$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{para } -1 < x < 0$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{para } 0 < x < \frac{1}{2}$$

Señálense otras propiedades de la curva que se dibuje.

Estudia el signo de la derivada para las siguientes funciones dadas por su gráfica:

