

(oscillateur forcé)

EX N°1

Un solide S de masse M est relié à un mur fixe par un ressort de raideur k pouvant osciller le long d'un axe ox horizontal dont l'origine est la position d'équilibre du solide. On suppose que le solide

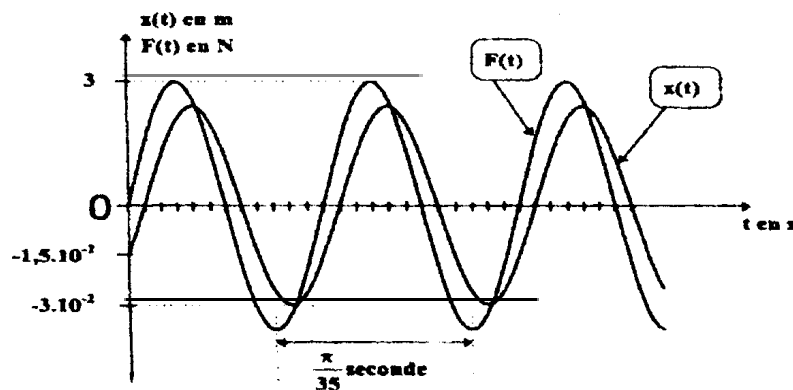
est soumis à une force excitatrice de la forme $\vec{f} = -h \vec{v}$ où h est une constante positive. Les oscillations sont entretenues par une force excitatrice de la forme :

$\vec{F} = F(t) \vec{u}_x$; l'élongation x vérifie l'équation différentielle suivante :

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + kx = F_m \sin(\omega t)$$

On fait varier progressivement la pulsation ω de l'excitateur à partir de sa valeur précédente dans le but d'obtenir une résonance d'élongation

Un dispositif approprié permet de tracer les courbes $x(t)$ et $F(t)$; on obtient la figure suivante :

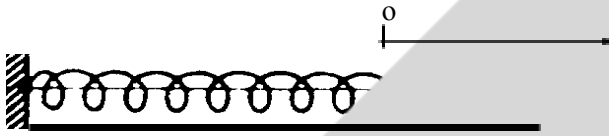


- 1)
 - a) Déterminer les expressions de $x(t)$ et $F(t)$.
 - b) Faites la représentation de Fresnel en prenant l'axe origine des phases initiales horizontal et l'échelle : $1N \leftrightarrow 1 \text{ cm}$
 - c) En déduire h et k .
 - d) Préciser en utilisant l'analogie formelle mécanique-électrique si le circuit électrique équivalent est un circuit inductif, capacitif ou résistif ?
- 2) On fait varier progressivement la pulsation ω de l'excitateur à partir de sa valeur précédente dans le but d'obtenir une résonance d'élongation
 - a- Déterminer en utilisant la représentation de Fresnel l'expression de l'amplitude x_m de l'élongation en fonction de h, k, m, F_m et de la pulsation ω .
 - b- Déterminer l'expression de la pulsation ω_r pour laquelle on a résonance d'élongation en fonction de la pulsation propre ω_0 , de h et de la masse m .
 - c- Sachant que la liaison entre le ressort et le solide ne supporte pas une tension supérieure à $7N$, vérifier en effectuant le calcul nécessaire si la liaison ressort-solide cédera à la résonance d'élongation.
- 3) A partir de la valeur ω_r précédente de la pulsation, on souhaite obtenir une résonance de vitesse.
 - a- Faut-il augmenter ou diminuer la valeur de la pulsation ω ? justifier la réponse.
 - b- Calculer alors la puissance mécanique moyenne absorbée par l'oscillateur.
 - c- Montrer que l'oscillateur se comporte alors comme un oscillateur libre non amorti et que son énergie mécanique reste constante au cours du temps. Calculer cette constante.

EX N°2

Un pendule élastique est constitué par un ressort de raideur k dont l'une des extrémités est relié à un point fixe et l'autre est soudé à un solide (S) de masse m pouvant se déplacer sur un plan horizontal.

La position d'équilibre de (S) coïncide avec l'origine de l'axe des phases initial. On représente comme l'indique la figure suivante :



Le solide subit l'effet d'une force excitatrice $\vec{F} = F_m \sin(\omega t) \vec{i}$ en même temps qu'une force de frottement visqueux $\vec{f} = -h \vec{v}$.

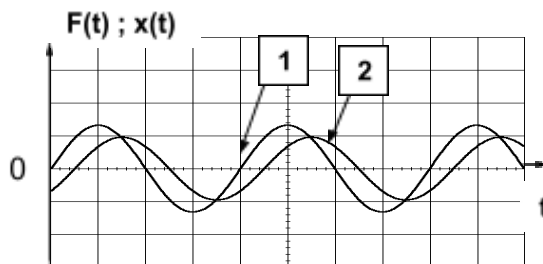
- 1) Etablir l'équation différentielle de l'élongation x .
- 2) La solution de l'équation différentielle s'écrit sous la forme $x = x_m \sin(\omega t + \varphi_x)$.
On prend $h = 2 \text{ N.m}^{-1}\text{s}$, $\omega = 15 \text{ rd.s}^{-1}$, $F_m = 12,5 \text{ N}$.
a-Calculer l'amplitude x_m et la phase φ_x de Fresnel les valeurs de x_m et φ_x .
b-Le point de soudure du ressort et le ressort ; ne supporte pas une tension supérieure à 9 N .
Vérifier si pour la valeur de ω la soudure risque de rompre. Faut-il augmenter ou diminuer ω pour éviter la casse ? Justifier la réponse.
- 3) Donner l'allure de la courbe $x_m = f(\omega)$ pour $h = 15 \text{ N.m}^{-1}\text{s}$.

EX N°3

Un pendule élastique constitué d'un ressort de raideur k disposé horizontalement sur un plan parfaitement lisse et dont l'une des extrémité est fixée et l'autre soudée à un solide de masse m . Le solide est soumis à une force excitatrice horizontale $\vec{F} = F_m \sin(\omega t) \vec{i}$ tout en subissant l'effet d'une force de frottement visqueux modélisée par $\vec{f} = -h \vec{v}$.

- 1) Etablir l'équation différentielle à laquelle obéit l'élongation x . On considère un axe (Ox) horizontale dirigé vers les allongements du ressort et dont l'origine coïncide avec la position d'équilibre.
- 2) Sur le schéma ci-dessous, sont représentées les courbes de variation de $x(t)$ et $F(t)$.
a) Identifier parmi les courbes 1 et 2 ; $x(t)$ et $F(t)$. Justifier la réponse ;
b) Expliciter $x(t)$ et $F(t)$ sachant que :
1 division horizontal = $\pi/140 \text{ s}$
1 division vertical = 4 N pour $F(t)$ et 8 cm pour $x(t)$
c) Déterminer par une méthode graphique utilisant la représentation de Fresnel h et m .
On donne $k = 100 \text{ N.m}^{-1}$

On choisira l'échelle $1\text{N} = 1\text{cm}$ et l'axe origine des phases initiales horizontal



- 3) On fait varier la pulsation ω de l'excitateur à partir de sa valeur précédente jusqu'à ce que les deux courbes précédentes deviennent en quadrature de phase ;
a) Montrer que l'oscillateur est alors le siège d'une résonance de vitesse.
b) Faut-il augmenter ou diminuer la pulsation à partir de sa valeur initiale pour atteindre ce but ? Justifier la réponse.
- 4) On rappelle que la pulsation ω_r correspondant à la résonance d'élongation s'exprime de la

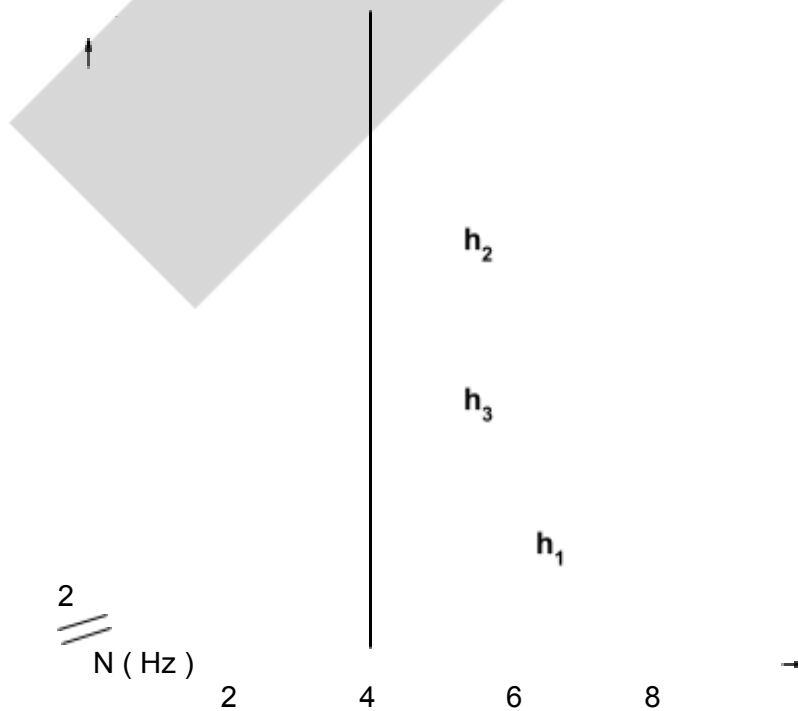
manière suivante :
$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}}$$
 avec ω_0 pulsation propre de l'oscillateur.

- a) Déterminer la valeur de l'amplitude x_m à la résonance d'élongation
- b) En utilisant l'analogie formelle mécanique-électrique déterminer l'expression de la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur analogue et préciser si le circuit est inductif, capacitif ou équivalent à une résistance pure.

EX N°4

Un pendule élastique constitué d'un ressort de raideur k est fixé à un support et un solide de masse m est excité par une force $F = F_m \sin(2\pi N t)$. La force de frottement fluide du type $f = -h \cdot v$.

Pour trois valeurs h_1 , h_2 et h_3 , on trace la courbe de réponse $x_m = f(N)$ x_m étant l'amplitude des élancements en fonction de la fréquence des excitations. Les trois courbes obtenues sont représentées sur la figure ci-dessous.



L'expression de x_m en fonction N , k , m , F_m et h est la suivante :

$$x_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 N^2 + (k - 4\pi^2 m N^2)^2}}$$

- 1) a- Déterminer à partir de la courbe la valeur de k sachant que $F_m = 2 \text{ N}$.
b- En déduire la fréquence propre N_0 de l'oscillateur sachant que $m = 144 \text{ g}$.
- 2) a- Déterminer l'expression de la fréquence N_r correspondant à une résonance d'élongation.
b- Classer les valeurs de h_1 , h_2 et h_3 par ordre croissant. Justifier la réponse.
- 3) Déterminer à partir de la courbe la valeur de h_2 .
- 4) On considère le cas où $h = h_2$ et $N = 4 \text{ Hz}$.
 - a- Faites la représentation de Fresnel correspondante en prenant comme échelle : $1 \text{ N} \leftrightarrow 2 \text{ cm}$
 - b- En déduire la valeur de φ_x .
 - c- Calculer la puissance mécanique moyenne absorbée par l'oscillateur.
 - d- Faut-il augmenter ou diminuer la valeur de N pour rendre cette puissance maximale ? Justifier.
 - e- Que risque-t-il de se produire si on annule le frottement fluide et on prend $N = N_0$? Justifier.

EX N°5 (bac 2009)

Un solide (S) de masse m est fixé à l'une des extrémités d'un ressort (R) à spires non jointives, de masse négligeable, de raideur $k = 25 \text{ N.m}^{-1}$ et dont l'autre extrémité est fixe. Le solide (S) est assujéti à se déplacer suivant l'axe du ressort (P) et est maintenu fixe et horizontal, tout en étant soumis à des frottements visqueux équivalents à une force $\vec{f} = -h\vec{v}$, où h est une constante positive appelée coefficient de frottement et $\vec{v}$ est la vitesse instantanée du solide (S). On donne $h = 1,4 \text{ N.s.m}^{-1}$.

On applique au solide (S) une force excitatrice $\vec{F} = F \vec{i}$, où $\vec{i}$ est le vecteur directeur unitaire de l'axe du ressort (R) et F est la fréquence réglable de l'excitateur. Le solide (S) se met à osciller suivant $(O, \vec{i})$, de part et d'autre de la position d'équilibre O de son centre d'inertie G. On désigne par $x(t)$ l'élongation de G par rapport au repère $(O, \vec{i})$.

1. a) Par application de la relation fondamentale de la dynamique, montrer que les oscillations du centre d'inertie G du solide (S) sont régies par l'équation différentielle :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + kx = F \sin(2\pi N t)$$

b) Cette équation différentielle admet comme solution $x(t) = X_m \sin(2\pi N t + \varphi_x)$.

Un solide (S) de masse m est fixé à l'une des extrémités d'un ressort (R) à spires non jointives, de masse négligeable, de raideur $k = 25 \text{ N.m}^{-1}$ et dont l'autre extrémité est fixe. Le solide (S) est assujéti à se déplacer suivant l'axe du ressort (P) et est maintenu fixe et horizontal, tout en étant soumis à des frottements visqueux équivalents à une force $\vec{f} = -h\vec{v}$, où h est une constante positive appelée coefficient de frottement et $\vec{v}$ est la vitesse instantanée du solide (S). On donne $h = 1,4 \text{ N.s.m}^{-1}$.

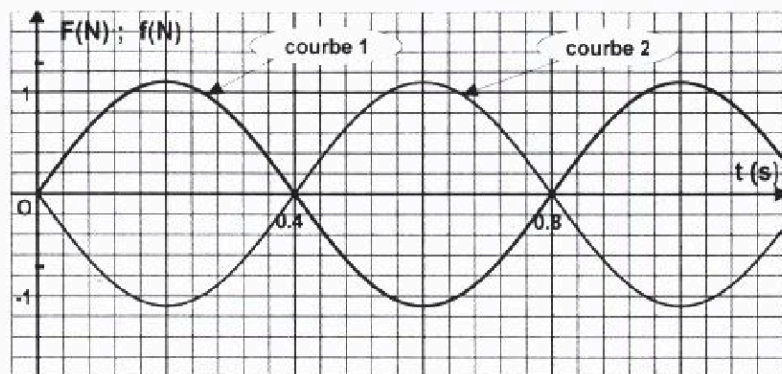
On applique au solide (S) une force excitatrice $\vec{F} = (1,1 \sin 2\pi N t) \vec{i}$, où $\vec{i}$ est le vecteur directeur unitaire de l'axe du ressort (R) et N est la fréquence réglable de l'excitateur. Le solide (S) se met à osciller suivant $(O, \vec{i})$, de part et d'autre de la position d'équilibre O de son centre d'inertie G. On désigne par $x(t)$ l'élongation de G par rapport au repère $(O, \vec{i})$.

1. a) Par application de la relation fondamentale de la dynamique, montrer que les oscillations du centre d'inertie G du solide (S) sont régies par l'équation différentielle :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + kx = F \sin(2\pi N t)$$

b) Cette équation différentielle admet comme solution $x(t) = X_m \sin(2\pi N t + \varphi_x)$.

- De quel régime s'agit-il ? Justifier.
2. La fréquence N de l'excitateur étant fixée à une valeur particulière N_1 , on trace avec un dispositif approprié, les chronogrammes de la figure ci-contre ; l'un représente l'évolution de F et l'autre représente celle de f au cours du temps.



- a) Déterminer parmi les courbes (1) et (2) celle qui représente $F(t)$.
- b) A l'aide des deux courbes (1) et (2), déterminer :
- la valeur N_1 de la fréquence de l'excitateur,
 - la valeur de l'amplitude f_m de la force de frottement $\vec{f}$,
- En déduire la valeur de X_m et celle de φ_x .

- c) Montrer qu'à tout instant t , $x(t)$ vérifie la relation : $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$

En déduire que l'oscillateur {(S), (R)} est en résonance de vitesse.

Montrer que son énergie totale E est constante.

- d) Déterminer la valeur de la masse m du solide (S).

EX N°6

Un pendule élastique constitué par un ressort de raideur $k = 40 \text{ N.m}^{-1}$, dont l'une des extrémités est fixe et l'autre soudée à un solide supposé ponctuel de masse m , glisse sans frottement sur un plan horizontal sous l'effet d'une force excitatrice $\vec{F} = F(t) \vec{i}$

Le mouvement du centre de gravité G du solide est rapporté à un axe (ox) horizontal d'origine o coïncidant avec la position d'équilibre du solide et dirigé vers les allongements du ressort. Au cours de son mouvement le solide est en plus soumis à une force de frottement fluide $\vec{f} = -h \vec{v}$.

Les expressions des valeurs algébriques $T(t)$ et $F(t)$ respectivement de la tension du ressort et de la force excitatrice exprimées en newton sont données ci-dessous :

$$F(t) = 5 \sin(10t) \text{ et } T(t) = 10 \sin(10t + \pi/2)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + kx = F$$

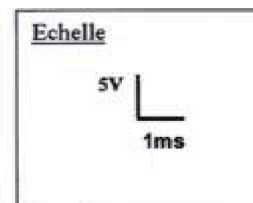
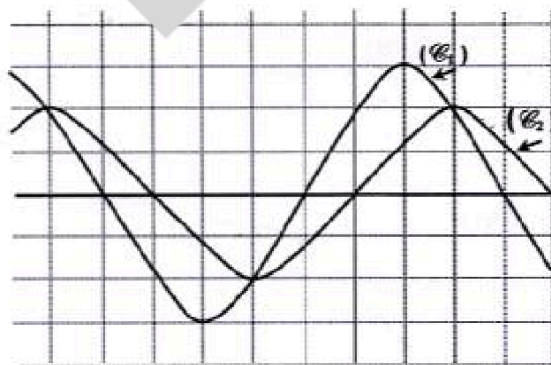
L'équation différentielle vérifiée par l'élongation x est :

- 1) Déterminer l'expression de $x(t) = x_m \sin(\omega t + \varphi_x)$
- 2) En déduire celle de la vitesse $v(t) = v_m \sin(\omega t + \varphi_v)$
- 3) En déduire que l'oscillateur est dans un état de résonance de vitesse.

- 4) Construire la représentation de Fresnel
- 5) Déterminer alors les valeurs de la m
- 6) En utilisant l'analogie formelle m en effectuant les calculs nécessaires si le condensateur

EX N°7

Un (G.B.F) alimente un circuit RLC série de tension alternative $u(t)$ d'expression $u(t) = U_m \sin(2\pi Nt + \frac{\pi}{2})$ alimente un circuit composé d'un condensateur de capacité $C = 6.10^{-6} \text{ F}$, une bobine d'inductance L et de résistance r en série avec une résistance $R = 100 \Omega$.
A l'aide d'un oscilloscope on visualise simultanément les tensions $u(t)$ aux bornes du (G.B.F) et $u_R(t) = U_{Rm} \sin(2\pi Nt + \phi_i)$ aux bornes du résistor . On obtient les courbes représentées ci-dessous :



- 1) Montrer que la courbe (C_1) correspond à la tension $u(t)$ et justifier que la courbe (C_2) permet l'étude de la variation de l'intensité $i(t)$ du courant électrique dans le circuit au cours du temps.
- 2) En exploitant l'oscillogramme , déterminer :
 - a- La fréquence N et les valeurs des tensions maximales U_m et U_{Rm}
 - b- Le déphasage $\Delta\phi = \phi_i - \phi_u$ de l'intensité i par rapport à la tension $u(t)$. justifier le signe de $\Delta\phi$
- 3) Déterminer l'expression de l'intensité $i(t)$ qui circule dans le circuit en fonction du temps en précisant les valeurs de l'amplitude I_m , de la pulsation ω et de la phase initiale ϕ_i
- 4) a- compléter, à l'échelle , la construction de Fresnel de la figure ci-dessous en représentant

les deux vecteurs de Fresnel correspondant aux tensions $u_C(t)$ (de module $\frac{I_m}{\omega C}$) et $u_L(t)$ (de module $L\omega I_m$)

- b- En exploitant cette représentation de Fresnel , montrer que le circuit est inductif.
- c- Déduire la valeur de la résistance r de la bobine et celle de son inductance L .
- d- Déterminer graphiquement la tension maximale $U_{(B+C)m}$ aux bornes de l'ensemble { bobine , condensateur }
- e- Déterminer la fréquence N qui permet d'obtenir une représentation de Fresnel où le vecteur de Fresnel correspondant à la tension $u(t)$ devient symétrique du précédent par rapport à la direction du vecteur représentant U_{mR} . Tracer alors les deux vecteurs

représentant $\frac{I_m}{\omega C}$ et $L\omega I_m$.

