Corrigé de CENTRALE-SUPELEC Physique PC 1ère épreuve 1998

I

I.A Ecoulement laminaire d'un fluide visqueux suivant Ox, la norme de vitesse dépendant de z, la pression dépendant de z par la pesanteur et de x par viscosité.

La vitesse du fluide le long des parois horizontales doit être égale à la vitesse de ces parois. Par contre, on considère que le fluide glisse sur les parois verticales.

Accélération particulaire convective :

I.B Bilan de quantité de mouvement d'un parallélépipède dx.dy.dz dont on suit le mouvement (conception eulérienne) pendant le temps dt :

- variation de quantité de mouvement :
- bilan des forces de pression : - **grad** p.dτ
- bilan des forces de viscosité :
- poids :

On écrit alors le Principe Fondamental de la dynamique :

En projection sur l'axe des x :

sur l'axe des z :

I.C L'écoulement étant stationnaire , donc : . Le second membre ne dépend pas de x, donc est une constante par rapport à x; ainsi, p dépend linéairement de x à z donné.

donc :

donc :

La synthèse de ces deux lignes donne :

Dans les plans d'abscisses x, la pression suit la loi de l'hydrostatique.

I.D 1 - Pour que le fluide s'écoule dans le sens de , il faut que .

2 - A partir de , par intégration :

Avec les conditions aux limites (v=0 en), on détermine les constantes α et β.

dont la valeur maximale est :

et la valeur moyenne :

3 -

4 - Les forces de viscosité exercées par le fluuide sur les deux parois horizontales sont égales par symétrie des relations; donc la force totale (somme des deux) est :

or : donc :

En régime stationnaire, la quantité de mouvement du fluide contenu dans le pavé de côtés L,b,a est constante dans le temps; la somme des forces est donc nulle. En projection sur l'axe Ox, n'interviennent que les forces de viscosité et les forces de pression sur les deux sections aux abscisses a,b; on obtient, tout calcul fait :

I.E. 1 - L'intégration de l'équation se fait comme en I.D.2

en v = 0 donc :

en donc :

qui permettent d'atteindre les constantes d'intégration α et β :

et d'écrire :

Le profil de vitesse résulte à la fois du gradient de pression et du déplacement de la paroi supérieure. Ce profil reste parabolique, mais il n'est plus symétrique.

Si , le profil de vitesse est linéaire, induit par le déplacement de la plaque (écoulement de Couette)

2 - On calcule d'abord le débit massique à travers ab :

Ce débit massique est nul lorsque :

3 - L'expression de v(z), dans le cas où le
débit massique est nul, est :

4 - Force exercée sur la plaque mobile :
reportée dans l'expression de F conduit à :

I.F Dans le cas d'un fluide idéal en écoulement stationnaire, un gradient de pression n'est pas nécessaire. Dans ce cas, l'écoulement est uniforme, la variation de pression y étant hydrostatique. Le mouvement de la paroi n'a aucune influence.

II

II.A La loi d'Ohm locale permet d'écrire :
Dans cette seule configuration, aucune force ne s'exerce sur les particules fluides autre que le poids et le gradient de pression vertical. Le liquide ne peut se mettre en mouvement.

II.B L'application d'un champ magnétique fait agir une force de Laplace sur chaque particule fluide :
Sous l'action de la force de Laplace, le liquide se met en mouvement suivant .

II.C Les charges de conduction du liquide sont entraînées suivant Ox dans le champ magnétique vertical; il en résulte un courant induit suivant Oy. Le courant total est la somme des courants de conduction et induit tous deux selon Oy :

est dirigé selon Oy.

Le champ magnétique est la somme du champ et du champ créé par le courant qui, lui étant orthogonal, doit posséder une composante selon Ox :

appartient au plan Oxz

Au champ électrostatique s'ajoute le champ électromoteur . Avec , on écrira :

En régime stationnaire :

En coordonnées cartésiennes, avec , et

permet d'écrire :
et donne :
Comme ne dépend pas de x, montre onc que ne dépend pas de z; par conséquent, le champ créé par le courant ne peut avoir de composante suivant z, de sorte que est constitué par le seul champ . On écrira donc que :

Le plan Oxy (z = 0) est un plan de symétrie des causes (sources de et sources de); il est donc un plan de symétrie des effets, donc : et, par son caractère axial :
j(x) est donc une fonction paire et B(z) une fonction impaire de z.

II.D Le bilan de quantité de mouvement, établi en I.B, doit tenir compte de la force de Laplace exercée sur le fluide, soit , dont la composante suivant x est , de sorte qu'en régime stationnaire :

On prend le gradient de pression nul selon Ox. Cela se justifie dans la mesure où le champ est responsable d'une mise en mouvement du fluide traversé par le courant de conduction; après une phase transitoire, un régime stationnaire peut s'établir.

II.E On écrira donc :

qu'on divise par η pour obtenir :

La solution complète de cette équation est :
Pour déterminer A et B nous écrivons que v s'annule en

d'où :

II.F A l'extérieur, c'est-à-dire pour : , donc : de sorte que obtenue par continuité aux frontières.

A l'intérieur, on reporte l'expression de v(z) dans l'équation pour obtenir qu'on intègre, compte tenu que B(z) est une fonction impaire (qui s'annule en z = 0)

II.G

On calcule pour une unité de longueur selon Ox. On obtient :
. En l'absence de :; d'où :

II.H. 1 -

Avec a = 0,18 mm, , on prendra donc un développement limité de cosh :

Valeur maximale de la vitesse :
On constate que le fluide se déplace très lentement.

2 -

La surface d'électrode sur une unité de Ox est de 1,8 cm^2. Pour une surface de 10 cm^2, on obtient i_0 = 6,84 μA. La valeur expérimentale de 1,9 μA est du même ordre de grandeur que la valeur théorique.

3 - Représentation graphique de

La courbe ressemble à la courbe expérimentale mais le domaine des valeurs de H est complètement différent.

4 - $k = 1{,}926.10^{-11}\ mT^{-1}$

Courbe théorique de i/i_0 dans le domaine (0,45 mT) :

On constate que la courbe théorique montre une valeur de i/i0 pratiquement égale à 1, comme si l'influence de B0 était imperceptible. Différent de la courbe expérimentale.

III

III.A Prenons le de :

Comme le est nul, il en résulte que , donc les surfaces de masse volumique constante (normales à) sont normales à tout comme les surfaces isobares.

Un fluide non barotrope est en équilibre dans le champ de pesanteur s'il est homogène, sinon il ne peut pas être en équilibre.

III.B . En considérant que ρ varie peu avec T :

IV

IV.A 1 - T varie avec x suivant la loi : qu'on reporte dans la relation du III.B :

2 - Avec un champ de pesanteur vertical, l'équilibre du fluide implique des surfaces d'égale masse volumique horizontales, ce qui n'est pas le cas.

La mise en mouvement des couches de fluide ne peut se faire qu'avec les forces de viscosité.

L'écoulement du fluide se fait dans le sens vertical, ascendant d'un côté et descendant de l'autre.

IV.B 1 Les plaques étant considérées illimitées, il y a invariance des grandeurs suivant y et z, donc T n'est fonction que de x. Dans ces conditions, en régime stationnaire, l'équation de transport thermique se réduit à qui conduit à la loi linéaire :

2 - En régime stationnaire, le bilan des forces amène à écrire :

que nous projetons selon Oz :

3 - Le champ de pression est le même que pour le fluide isotherme à T_0 : donc qu'on reporte dans l'équation précédente :

En prenant l'expression de ρ du IV.A.1 : au second ordre près, donc :

On posera :

4 - On intègre avec v = 0 en

L'écoulement est rotationnel puisque :
est non nul

V

V.A Equilibre possible car les surfaces isobares coïncident avec les surfaces isothermes donc de masse volumique constante. Mais, l'équilibre est instable si le centre de poussée d'Archimède d'une particule fluide se trouve au-dessous de son centre de gravité.

V.B. 1 - Pendant τ, la boule s'est déplacée de $\delta z = v\tau$ vers le haut. La différence entre la température de la boule et celle du fluide est alors :

Comme la température de la boule est plus élevée que celle du fluide, la masse volumique de la boule est plus faible que celle du fluide : . La poussée d'Archimède est donc plus grande que son poids, et la force qui s'exerce sur la boule est :

2 - La vitesse de la boule augmentera si cette force motrice est supérieure à la force de viscosité de Stokes; le critère d'instabilité est donc :

Si la particule est descendante, le raisonnement reste valable avec des signes opposés , mais les normes des forces sont inchangées.

Donc : conduit à :

donc :

3 - $\underline{R_{ac} = 1\,714}$

conduit à :

V.C. 1 - Dans l'équation on tient compte que donc : d'après l'énoncé. L'équation devient :

Avec : par définition du coefficient de dilatation. Finalement :

Dans l'équation nous écrivons : avec de sorte que et . D'où :

2 - La fonction v(x,t) ne vérifie pas les conditions aux limites sur les parois horizontales

Le facteur cos xh rend compte de la périodicité des rouleaux et que ceux-ci sont circulaires de diamètre a.

En portant dans les équations de V.C.1 les fonctions et , on obtient :

En éliminant δT_0 et v_0, on obtient l'équation du second degré :

3 - Pour que le fluide se mette en mouvement, il faut que $s > 0$ afin que la vitesse croisse avec le temps.

A la limite $s = 0$, on obtient : soit, avec :

La valeur minimale de est soit :

4 - La valeur expérimentale R_{ac} voisine de 1700 conforte la valeur trouvée en V.B.3, mais montre que les approximations faites en V.C sont plutôt éloignées de la réalité.