

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель председателя оргкомитета
III (областного) этапа республиканской
олимпиады,
заместитель начальника управления
образования Могилёвского облисполкома

С. В. Леонова
ноября 2011 года

Задания для II этапа республиканской олимпиады по математике

19 ноября 2011 года

10 класс

1. Картофельное поле имеет форму прямоугольника и размеры 10×67 м. По полю ползают 2011 колорадских жуков так, что никакие три из них никогда не оказываются на одной прямой. Доказать, что в любой момент времени найдутся 4 таких жука, что площадь четырехугольника с вершинами в точках, где находятся эти жуки, не превысит 1 м^2 ? Считать, что жуки ползают только по поверхности поля.

2. Три окружности с центрами O_1, O_2, O_3 попарно касаются друг друга. В треугольник $O_1O_2O_3$ вписана окружность ω . К окружности ω проведены три касательные. Первая касательная проходит параллельно отрезку O_2O_3 и пересекает отрезки O_1O_2 и O_1O_3 в точках A_1 и B_1 соответственно. Вторая касательная проходит параллельно отрезку O_1O_3 и пересекает отрезки O_1O_2 и O_2O_3 в точках A_2 и B_2 соответственно. Третья касательная проходит параллельно отрезку O_1O_2 и пересекает отрезки O_1O_3 и O_2O_3 в точках A_3 и B_3 соответственно. Найти радиусы окружностей, если периметры треугольников $A_1O_1B_1, A_2O_2B_2, A_3O_3B_3$ равны 12, 14, 16 соответственно.

3. Дана функция $f(x)$, определенная на всей числовой прямой, кроме нуля, такая, что для любого x из области определения выполняется равенство:

$$f(x) - 2f\left(\frac{2011}{x}\right) + 2x = \frac{2011}{x}.$$

Чему равно $f(2011)$?

4. Словами *РЕСПУБЛИКА* и *БЕЛАРУСЬ* зашифрованы некоторые два натуральных числа, при этом каждая буква обозначает некоторую цифру. Одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, а любые две разные буквы, среди которых нет мягкого знака, обозначают разные цифры. Какую цифру может обозначать мягкий знак, если сумма цифр числа *БЕЛАРУСЬ* равна 26, а число *ПИК* кратно 11?

5. Найти наименьшее значение функции:

$$f(x) = \sqrt{441 + x^2 - 42x \cdot \cos \alpha} + \sqrt{400 + x^2 - 40x \cdot \cos \beta},$$

где α и β – острые углы, такие, что $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Время работы: 4,5 часа

1. Доказательство.

Разобьем стороны прямоугольника соответственно на 10 и 67 отрезков длиной 1 м. Через точки разбиения проведем прямые, параллельные, сторонам прямоугольника. В итоге поле окажется разбитым на 670 квадратов размера 1×1 м. Заметим, что в каком-либо квадрате окажется не менее 4 жуков. В противном случае, общее количество жуков на поле будет не более, чем $3 \times 670 = 2010$ жуков. Тогда площадь четырехугольника с вершинами в точках, где находятся эти 4 жука, не превысит площадь квадрата, где они находятся, т. е. 1 м^2 . Что и требовалось доказать.

2. Решение.

Пусть окружности попарно касаются в точках K, M, N . Поскольку $O_1K = O_1M = R_1$, $O_2M = O_2N = R_2$, $O_3N = O_3K = R_3$, то окружность, вписанная в треугольник $O_1O_2O_3$, касается его сторон в точках K, M, N .

Пусть окружность ω касается стороны A_1B_1 в точке P . Рассмотрим окружность с центром O_1 . $O_1K = O_1M = R_1$.

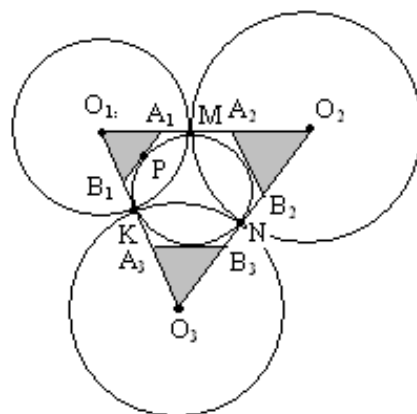
Но $O_1K = O_1B_1 + B_1K$. Заметим, что $B_1K = B_1P$, тогда $O_1K = O_1B_1 + B_1K = O_1B_1 + B_1P$. Аналогично, $O_1M = O_1A_1 + A_1P$.

Тогда $O_1K + O_1M = O_1B_1 + B_1P + O_1A_1 + A_1P = O_1B_1 + O_1A_1 + A_1P + B_1P = O_1B_1 + O_1A_1 + A_1B_1 = P(\Delta O_1A_1B_1)$. $2R_1 = P(\Delta O_1A_1B_1) = 12$.

Отсюда $R_1 = 6$.

Аналогично получаем: $2R_2 = P(\Delta O_2A_2B_2) = 14$ и $R_2 = 7$; $2R_3 = P(\Delta O_3A_3B_3) = 16$ и $R_3 = 8$.

Ответ: 6, 7, 8



3. Решение. Подставим в исходное равенство $x = 2011$.

$$f(2011) - 2f(1) + 4022 = 1$$

$$f(2011) - 2f(1) = -4021 \quad (1)$$

Подставим в исходное равенство $x = 1$.

$$f(1) - 2f(2011) + 2 = 2011$$

$$f(1) - 2f(2011) = 2009 \quad (2)$$

Удвоим равенство (2) и сложим с равенством (1): $-3f(2011) = -3$, откуда $f(2011) = 1$.

Ответ: $f(2011) = 1$.

4. Решение. Заметим, что *РЕСПУБЛИКА* состоит из 10 разных букв, среди которых нет мягкого знака, значит среди цифр этого числа встречаются по одному разу цифры 0, 1, 2, ..., 9. Тогда сумма цифр числа *РЕСПУБЛИКА* равна $0 + 1 + 2 + \dots + 9 = 45$.

Имеем: $P + E + C + П + У + Б + Л + И + К + А = 45$, $Б + Е + Л + А + Р + У + С + Б = 26$.

Тогда $(P + E + C + П + У + Б + Л + И + К + А) - (Б + Е + Л + А + Р + У + С + Б) = 45 - 26 = 19$.

$$П + И + К - Б = 19. \quad (1)$$

Так как ПИК кратно 11, то по признаку делимости на 11 имеем $П + К - И = 11n$. Но $П + К - И \leq 9 + 8 - 0 = 17$. Отсюда $n = 0$ или $n = 1$.

При $n = 0$ имеем: $П + К - И = 0$, $П + К = И$. Тогда (1) примет вид: $2И - Б = 19$. Но поскольку $2И \leq 18$, последнее равенство невозможно.

При $n = 1$ имеем: $П + К - И = 11$, $П + К = И + 11$. Тогда (1) примет вид $2И + 11 - Б = 19$, $2И - Б = 8$.

Очевидно, что $I \geq 4$ и $I < 9$. При I равном 4, 5, 6, 7, 8 получим значения B : 0, 2, 4, 6, 8.

Далее, по условию $B+E+L+A+P+Y+C+B = 26$, $B+E+L+A+P+Y+C+B \geq 0+1+2+3+4+5+6+B = 21+B$; $26 \geq 21+B$; $B \leq 5$. Тогда B может быть равен 0, 2, 4.

Легко построить примеры, показывающие, что все значения возможны.

$B = 0$

Р	Е	С	П	У	Б	Л	И	К	А		Б	Е	Л	А	Р	У	С	Ь
1	2	3	9	5	7	8	4	6	0		7	2	8	0	1	5	3	0

$B = 2$

Р	Е	С	П	У	Б	Л	И	К	А		Б	Е	Л	А	Р	У	С	Ь
1	2	3	9	4	6	8	5	7	0		6	2	8	0	1	4	3	2

$B = 4$

Р	Е	С	П	У	Б	Л	И	К	А		Б	Е	Л	А	Р	У	С	Ь
1	2	3	9	5	7	4	6	8	0		7	2	4	0	1	5	3	4

Ответ: 0, 2, 4.

5. Решение.

Несложно заметить, что наименьшее значение функции $f(x)$ будет достигаться при некотором $x > 0$ (при отрицательных значениях x минусы внутри корней «превратятся» в плюсы и значение функции увеличится). Поэтому будем полагать, что $x > 0$.

Преобразуем функцию $f(x)$:

$$f(x) = \sqrt{21^2 + x^2 - 2 \cdot 21 \cdot x \cdot \cos \alpha} + \sqrt{20^2 + x^2 - 2 \cdot 20 \cdot x \cdot \cos \beta}$$

Заметим, что подкоренные выражения представляют собой записи теоремы косинусов для треугольников со сторонами 21 и x , а также 20 и x и углами α и β соответственно.

Дадим геометрическую интерпретацию правой части последнего равенства.

Пусть $AC=21$, $CD=x$, $BC=20$, $\angle ACD=\alpha$, $\angle DCB=\beta$ (см. рис). Тогда

$$AD = \sqrt{21^2 + x^2 - 2 \cdot 21 \cdot x \cdot \cos \alpha}, \quad BD = \sqrt{20^2 + x^2 - 2 \cdot 20 \cdot x \cdot \cos \beta}.$$

Тогда по неравенству треугольника имеем: $f(x) = AD + DB \geq AB$.

Т. к. $\alpha + \beta = 90^\circ$, то $\angle ACB=90^\circ$, треугольник ABC – прямоугольный и $AB = \sqrt{21^2 + 20^2} = 29$.

Таким образом, минимальное значение функции $f(x)$ равно 29.

Отметим, что $f(x) = AB = 29$, если значение x таково, что точка D совпадет с точкой E (см. рисунок).

Ответ: 29.

