

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2024
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 1$.

Μονάδες 7

A2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \ln \frac{1}{x} \right) = 0$.

β) Κάθε συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

γ) Η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει ότι $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$.

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx.$$

ε) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2 \ln x - 1$ και η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = x - 2$.

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.

Μονάδες 6

Αν $h(x) = 2 \ln(x - 2) - 1$, $x > 2$, τότε:

B2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς την κυρτότητα.

Μονάδες 6

B3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται (μονάδες 3) και να βρείτε την αντίστροφή της h^{-1} (μονάδες 4).

Μονάδες 7

B4. Αν $h^{-1}(x) = 2 + e^{\frac{x+1}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$, να εξετάσετε αν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = (h^{-1}(x) - 3) \cdot (x^3 - 8) \text{ στο } [-1, 2].$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με

$$f(x) = \{e^{x+1} + \lambda x, \quad x < -1 \quad \frac{\alpha x + \alpha}{x + \alpha}, \quad x \geq -1\}, \text{ όπου } \alpha > 1 \text{ και } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ (μονάδες 5) και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(-1, 0)$ (μονάδες 3).

Μονάδες 8

Γ3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 7

Γ4 Να αποδείξετε ότι:

$$f(\eta\mu x - 2) \geq 2\eta\mu x - 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : (0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

- $|g(x) - g(y)| \leq (x - y)^2$, για κάθε $x, y \in (0, \frac{\pi}{2}]$
- $g(x) = f(x) \eta\mu x$, για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$
- $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση g είναι σταθερή για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$.

(Μονάδες 4)

ii) ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x) = \frac{1}{\eta\mu x}$.

(Μονάδες 1)

Μονάδες 5

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1» (μονάδες 3) και να βρείτε το σύνολο τιμών της (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Δ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha) - 2}{x - \frac{\pi}{4}} + \frac{f^{-1}(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{3}}{x - \sqrt{2}} = 0, \text{ με } \alpha \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$$

έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2})$

Μονάδες 6

Δ4. i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση

$$H(x) = \frac{1}{2} \ln(1 - \sin x) - \frac{1}{2} \ln(1 + \sin x), x \in (0, \frac{\pi}{2}]$$

είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $h(x) = \frac{\eta\mu x}{1 - \sin^2 x}$ στο $(0, \frac{\pi}{2}]$.

(Μονάδες 2)

- ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τις ευθείες $y = 2$ και $x = \frac{\pi}{2}$.

(Μονάδες 6)

Μονάδες 8