

Розв'язки, 7 клас

1. Нехай у кошику всього x яєць. За умовою складемо вирази:

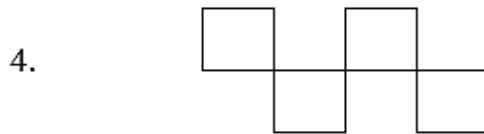
$$x - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x; \quad \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}x = \frac{1}{8}x; \quad \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}x = \frac{1}{8}x; \quad \frac{1}{8}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}x = \frac{1}{16}x;$$

$$\frac{1}{16}x = 10; \quad x = 160.$$

2.

$$\begin{array}{r} 385 \\ 412 \\ \hline 770 \\ 385 \\ \hline 1540 \\ \hline 158620 \end{array}$$

3. $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$ «Тисяча и одна ночь»



5. Їх п'ятеро. Якщо в когось із Катрусиних друзів є сусіди тієї самої статі, то очевидно, що всі, хто стоять в колі, - однієї статі. Отже, хлопчики й дівчатка чергуються, а звідси випливає, що дівчаток стільки ж, скільки й хлопчиків.

Розв'язки, 8 клас

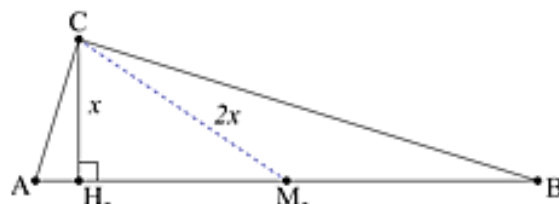
1.Відповідь: ні.

Розв'язання.

Якщо в парі стоять два лицарі або два брехуни, то вони один про одного скажуть «він лицар». Якщо в парі стоять лицар і брехун, то вони обидва скажуть «він брехун». Таким чином, кожна фраза виголошена парне число разів. Якби цих фраз було порівну, то кожна фраза пролунала б по $2010:2=1005$ разів. А це число непарне.

2.Відповідь: $75^\circ, 15^\circ, 90^\circ$.

Розв'язання



Нехай в $\triangle ABC (\angle C = 90^\circ)$ до гіпотенузи $AB = 4x$ проведено висоту CH . Тоді її довжина, за умовою, становить $CH = x$.

Проведемо медіану CM . Так, як CM виходить з вершини прямого кута, то $CM = AB/2 = 2x$.

У трикутнику CHM катет CH в два рази менший за гіпотенузу. Тому $\angle CMH = 30^\circ$.

Тоді в рівнобедреному трикутнику BMC , де $BM = MC$, $\angle BMC = 150^\circ$. Отже, $\angle B = 15^\circ$, а $\angle A = 75^\circ$.

3. Нехай це число $\overline{xy}$.

$$\begin{cases} x + y = 16; \\ y + 10x = x + 10y - 18 \end{cases}$$

$$x=7, y=9.$$

Відповідь: : 79.

4. Якщо число n кратне 3, то його можна записати $n = 3k$. Оскільки дане число не ділиться на 3, то загальний вигляд цього числа $3k + 1$, або $3k + 2$.

$$(3k + 1)^2 + 8 = 9k^2 + 6k + 1 + 8 = 9k^2 + 6k + 9 = 3(3k^2 + 2k + 3) - \text{це число ділиться на 3};$$

$$(3k + 2)^2 + 8 = 9k^2 + 12k + 4 + 8 = 9k^2 + 12k + 12 = 3(3k^2 + 4k + 4) - \text{це число ділиться на 3};$$

Отже, число $n^2 + 8$ кратне 3.

5. Нехай у класі хлопчиків x , а дівчат $-y$, тоді

$$2xy = 4(3y + 2x)$$

$$xy - 6y - 4x = 0$$

$$(x - 6)(y - 4) = 24.$$

Переглянувши усі дільники числа 24 і одержимо різні можливі відповіді, серед яких максимальне значення $(x+y)$ буде для двох випадків 1i24 або 24i1.

$$x=7, y=28 \text{ або } x=30, y=5.$$

$$x+y=7+28=30+5=35$$

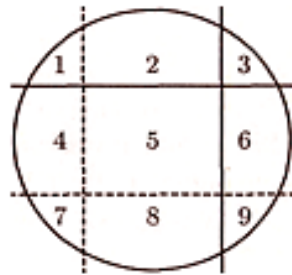
Відповідь: 35 дітей.

Розв'язки, 10 клас

1. Складемо та розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a + b - 4 = -1 \\ 4a - 2b - 4 = 2 \end{cases} \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

2. Нехай у книгарні «Знання» x книжок, тоді підручників $0,2x$. Оскільки серед підручників 60% видані українською мовою, то їх кількість становить $0,2x \cdot 0,6 = 0,12x$. Отже, підручників, виданих українською мовою 12% від усіх книжок у книгарні «Знання»
3. Проведемо розрізи як показано на малюнку. Визначимо кому дісталось пирога не менше половини. Проведемо ще два розрізи, симетричні проведеним. Куски 1, 2, 6, 9 дістались Малюку, а симетричні їм 7, 8, 4 і 3 – Карлсону, якому відійшла ще і середина 5. Тому Карлсону дісталось не менше половини пирога.



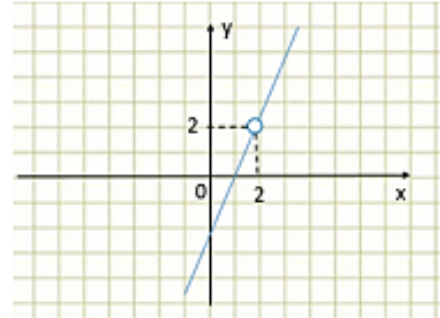
4. **Розв'язання.** Нехай остання цифра числа дорівнює 5. Тоді воно не може закінчуватися на 9, а отже, більше 20. Так як ціле число, більше 20, не може бути менше 21, то шукане число ділиться на 12. Але число, що ділиться на 12, парне, і тому не може закінчуватися на 5. Протиріччя. Це означає, що шукане число ділиться на 7. Єдине двозначне число, що ділиться на 7 і закінчується на 9 - це 49. Але число 49 не ділиться на 12 і більше 21. Протиріччя. Тому шукане число більше 20 і ділиться на 12. Єдине двозначне число, що ділиться на 7 і 12 - це 84.
5. **Розв'язання.** В рівнобедреному $\triangle QPS$ $\angle PQS = \angle PSQ = (180^\circ - \angle QPS) : 2 = (180^\circ - 12^\circ) : 2 = 84^\circ$. Тоді у рівнобедреному $\triangle PRS$ $\angle PRS = \angle SPR = \angle PSQ : 2 = 84^\circ : 2 = 42^\circ$.

Розв'язки, 11 клас

$$1. \ y = \frac{(2x-4)(x-1)}{x-2} = \frac{2(x-2)(x-1)}{x-2} = \frac{2(x-1)}{1} =$$

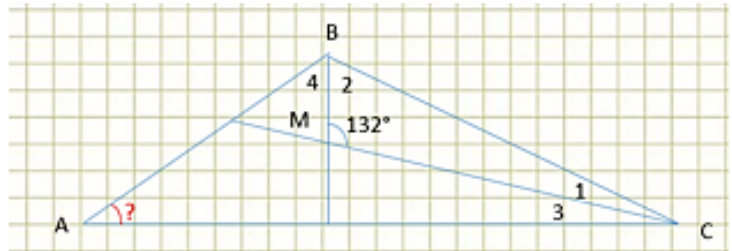
$$2(x-1) = 2x-2,$$

$$x-2 \neq 0, x \neq 2$$



2. В трикутнику сума кутів 1 і 2 дорівнює $180^\circ - 132^\circ = 48^\circ$.

Оскільки бісектриси ділять кути навпіл, то сума кутів 3 і 4 теж дорівнює 48° . Отже, сума кутів C і B дорівнює $48^\circ + 48^\circ = 96^\circ$.



Тоді кут A дорівнює $180^\circ - 96^\circ = 84^\circ$.

$$3. \ \frac{3^{n+2}}{576^n} \cdot 8^{2n-1} \cdot \sqrt{9^n} = \frac{3^n \cdot 3^2 \cdot (2^{6n-8})}{2^{6n} \cdot 3^{2n}} \cdot 3^{\frac{2n}{2}} = \frac{3^n \cdot 3^2 \cdot 2^{6n} \cdot 3^n}{2^{6n} \cdot 3^n \cdot 3^n \cdot 2^8} = \frac{9}{8}$$

$$4. \ x^3 + |x| = 0$$

Якщо $x \geq 0$, то маємо рівняння $x^3 + x = 0$; $x(x^2 + 1) = 0$; $x = 0$.

Якщо $x < 0$, то маємо рівняння $x^3 - x = 0$; $x(x^2 - 1) = 0$; $x = 0$; $x = -1$; $x = 1$

Відповідь: -1 ; 0 ; 1

6. Площа збільшиться на 32%

