

DISPOSITIFS MAGNETIQUES

I – Création de champs magnétiques ayant des propriétés particulières

IA – Champ uniforme : solénoïde et bobines de HELMHOLTZ

•1- On applique le théorème d'Ampère à un contour rectangulaire, avec un côté à l'extérieur (on admet que le

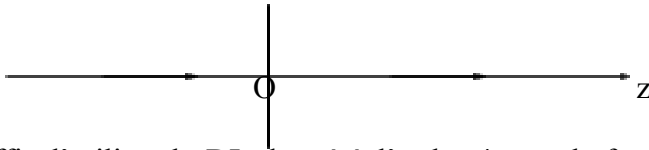
champ est nul), et un côté à l'intérieur. $B_{\text{sol}} = \frac{\mu_0 NI}{l}$. Ce champ est porté par l'axe Oz.

•2- On utilise la formule classique $B_c = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta$ avec $\sin \theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} = (1+u^2)^{-1/2}$ Donc : $B_c = \frac{\mu_0 I}{2R} (1+u^2)^{-3/2}$
 $B_c = B_c(0) (1+u^2)^{-3/2}$ champ porté par l'axe Oz.

•3- Pour la bobine (1) $\sin \theta_1 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (d+z)^2}} = [1 + (1/2 + u)^2]^{-1/2}$ et pour la bobine (2) $\sin \theta_2 = [1 + (-1/2 + u)^2]^{-1/2}$
 $B_h = \frac{\mu_0 NI}{2R} \{ [1 + (1/2 + u)^2]^{-3/2} + [1 + (-1/2 + u)^2]^{-3/2} \}$

Donc en ajoutant les 2 champs de même sens : $B_h = \frac{\mu_0 NI}{2R} \{ [1 + (1/2 + u)^2]^{-3/2} + [1 + (-1/2 + u)^2]^{-3/2} \}$
 Le graphe pour B_c est une courbe « en cloche » en $u=0$, celui de B_h présente un « plateau » autour de $u=0$
(mais on aurait dû demander ce graphe après les 2 questions suivantes !)

•4- Le plan (xOy) est plan de symétrie pour la répartition de courant ; donc on a la géométrie suivante, pour les points d'abscisse $+z$ et $-z$: la fonction $B_h(u)$ est donc paire.



Il suffit d'utiliser le DL donné à l'ordre 4 pour la formule trouvée à la question 3. Les termes en u et en u^3

disparaissent dans la somme, et on obtient exactement : $\tilde{g}(u) = \gamma (1 - \frac{144}{125} u^4)$ avec $\gamma = \frac{8NI\mu_0}{5R\sqrt{5}}$

Dans la suite notons $a = 144/125 = 1,15$

•5- La variation relative de $\tilde{g}(u)$ est $a \cdot u^4$; elle vaut 2% pour $u = 0,363$: large « plateau » autour de $z=0$.

•6- La symétrie de révolution du dispositif indique que la variable θ n'apparaît pas dans les composantes du champ ; le plan d'antisymétrie (MOz) de la répartition de courants entraîne que le champ magnétique appartient à ce plan, et donc que $B_{h\theta} = 0$.

•7- L'expression de l'énoncé s'écrit : $B_{hz}(r,z) = \gamma [1 - a \frac{z^4}{R^4}] - \frac{12a\alpha\gamma z^2 r^2}{R^4} + \beta(r)$
 $\beta(r)$ sera le terme suivant du DL pair en r , donc sera un terme en r^4 , ce que la suite confirme.

Les équations de Maxwell en M s'écrivent : $\text{div } \vec{B} = 0$ et $\vec{\text{Rot}} \vec{B} = \vec{0}$. En utilisant le formulaire donné dans l'énoncé, cela conduit aux 2 équations scalaires :

$$(1) : \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_{hr}) = - \frac{\partial B_{hz}}{\partial z} \quad \text{et} \quad (2) : \frac{\partial B_{hr}}{\partial z} = \frac{\partial B_{hz}}{\partial r}$$

On utilise d'abord (1), ce qui donne : $\frac{\partial}{\partial r} (r B_{hr}) = \frac{4a\gamma z^3 r}{R^4} + \frac{24a\alpha\gamma z r^3}{R^4}$ qui s'intègre en :

$$r \cdot B_{hr} = \frac{2\gamma a z^3 r^2}{R^4} + \frac{6a\alpha\gamma z r^4}{R^4} + F(z) \quad \text{de plus } F(z) = 0 \text{ (faire } r=0 \text{ pour le voir). Donc : } B_{hr} = \frac{2\gamma a z^3 r}{R^4} + \frac{6a\alpha\gamma z r^3}{R^4}$$

On reporte cette expression, et celle de B_{hz} , dans l'équation (2), et on identifie les termes en r et les termes en

$$r^3, \text{ ce qui aboutit à : } \alpha = -1/4 \quad \text{et} \quad \beta(r) = \frac{-3a\gamma r^4}{8R^4}.$$

En résumé on a trouvé : $B_{hz} = \gamma + \frac{a\gamma}{R^4} (-z^4 + 3z^2r^2 - 3r^4/8)$ et $B_{hr} = \frac{a\gamma}{R^4} (2z^3r - 3zr^3/2)$

•8 – Cas du solénoïde : nombre de spires $N = \frac{LB}{\mu_0 I} = 3,18 \cdot 10^4$ Longueur du fil $L = N\pi D = 4 \cdot 10^5 \text{ m}$.

•9 – Cas des bobines de Helmholtz : la variation relative de 2% de B_h s'obtient (cf 5°) pour $u_{\max} = 0,363$ pour $z_{\max} = H/2$ donc $0,363 = H/2R$ ce qui donne $R = H/(2 \cdot 0,363)$ $R = 5,5 \text{ m}$.

De plus on veut au centre $B(0) = \gamma = 0,5 \text{ T}$ avec $\gamma = \frac{8NI\mu_0}{5R\sqrt{5}}$ On connaît I, R , on extrait : $N = 3,06 \cdot 10^4$
La longueur du fil est $L = 2 \cdot N \cdot 2\pi R = 2,1 \cdot 10^6 \text{ m}$. (facteur 2 car 2 bobines)

•10 – La source de champ la plus économique en fils (mais moins pratique quant à la place occupée) semble

le solénoïde. On calcule facilement la puissance Joule par $P_j = R \cdot I^2 = \frac{LI^2}{S}$ avec S = section du fil « carré ».
 $S = 4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$ On trouve $P_j = 16,7 \text{ MW}$. D'où un sérieux problème d'évacuation de cette chaleur ! (nécessité d'un circuit de refroidissement).

On peut adopter de préférence un bobinage supraconducteur.

I B – Champ linéaire : bobines de « MHOLTZHEL »

•11 – On effectue le même calcul qu'à la question 3°, avec cette fois $d = \sqrt{3}R/2$, et le champ créé par la bobine (1) négatif d'après le sens du courant. On obtient ainsi :

$$B_m = \frac{\mu_0 NI}{2R} \{ -[1 + (\sqrt{3}/2 + u)^2]^{-3/2} + [1 + (-\sqrt{3}/2 + u)^2]^{-3/2} \}$$

•12 – On utilise de même le DL donné ; les termes constants, en u^2 , en u^4 , disparaissent ; il reste les termes en

$$u \text{ et en } u^5, \text{ ce qui donne pour l'accolade : } \{ \} = \frac{12\sqrt{3}}{7} u [1 - \frac{7 \cdot 2112}{12 \cdot 2401} u^4]$$

$$\text{A un terme du 5}^{\text{ième}} \text{ ordre près, on a donc : } B_m = a z, \text{ avec } a = \frac{48\sqrt{3}\mu_0 NI}{49\sqrt{7}R^2}$$

•13 – Le terme $\frac{7 \cdot 2112}{12 \cdot 2401} u^4$ doit être inférieur à 2%, ce qui donne $u_{\max} = 0,444$.

•14 – On souhaite réaliser $a = 10 \text{ T} \cdot \text{m}^{-1}$ $\frac{48\sqrt{3}}{49\sqrt{7}} = 0,641$ d'où $N = \frac{aR^2}{0,641\mu_0 I}$ $N = 1,24 \cdot 10^4$.

II – Expérience de Stern et Gerlach

•15 – $E_{c0} = 3/2 \text{ kT}$ AN : $T = 773 \text{ K}$

•16 – Dans le domaine $0 < x < l$ $E_p = -m_z B(z) = -m_z a \cdot z$ Il y a donc une force magnétique dirigée selon Oz, d'expression $F = a m_z = \text{constante}$. Un exercice élémentaire de mécanique du point conduit à :

$$x = v_0 t \quad z = \frac{a m_z t^2}{2m(Li)} \quad \text{donc} \quad z = \frac{a m_z x^2}{2m(Li)v_0^2} = \frac{a m_z x^2}{4E_{c0}} \quad (\text{l'énoncé semble confondre vitesse quadratique moyenne et vitesse utile de sortie du four})$$

•17 – Pour $l < x < D$ l'atome n'est soumis à aucune force, la trajectoire est rectiligne uniforme, une géométrie

élémentaire donne : $z = z(l) + (x-l) \frac{dz}{dx}(l)$, où $z(l)$ et $\frac{dz}{dx}(l)$ s'obtiennent par raccord avec le domaine précédent.

D'où en $x=l+D$ $z_0 = z(l)+D \frac{dz(l)}{dx}$ ce qui donne : $z_0 = \frac{am_z l^2}{4E_{c0}}(1+\frac{2D}{l})$

•18 – Les 2 taches symétriques par rapport à Ox indiquent que m_z peut prendre 2 valeurs opposées.

•19 – AN : on extrait m_z de l'expression de z_0 . On obtient : $|m_z| = 9,55 \cdot 10^{-24} \text{ A.m}^2$
(valeur proche du magnéton de Bohr $\mu_B = 9,25 \cdot 10^{-24} \text{ A.m}^2$)

III – IDENTIFICATION DE PARTICULES DANS UNE CHAMBRE A PROJECTION TEMPORELLE

III A – Mouvement d'un électron d'ionisation dans la chambre de dérive

•20 – $m_e \frac{dv_x}{dt} = -eBv_y - \mu v_x$ (1) $m_e \frac{dv_y}{dt} = eBv_x - \mu v_y$ (2) $m_e \frac{dv_z}{dt} = \frac{eU}{L} - \mu v_z$ (3)

L'équation (3) s'écrit : $\tau \frac{dv_z}{dt} + v_z = \frac{eU}{\mu L}$ Posons $V_{lim} = \frac{eU}{\mu L}$ $v_z = V_{lim} + (v_{ez} - V_{lim}) \exp(-t/\tau)$

•21 – AN $V_{lim} = 5,0 \cdot 10^4 \text{ m.s}^{-1}$. En négligeant v_{ez} devant V_{lim} : $v_z = V_{lim}(1 - \exp(-t/\tau))$; donc l'écart relatif entre v_z et V_{lim} devient inférieur à 1% pour $t > \tau \ln(100)$. AN : $\tau = 9,5 \cdot 10^{-12} \text{ s}$ et $T = 4,4 \cdot 10^{-11} \text{ s}$.

Remarque : comparons T et la durée de transit à travers la chambre de dérive, de l'ordre de $(L/2V_{lim}) = 2 \cdot 10^{-5} \text{ s}$: on peut donc dire que v_z vaut quasiment V_{lim} pendant toute la durée du transit.

•22 – Il suffit de faire la combinaison : équ(1)+iéqu(2) pour obtenir aisément l'équation différentielle :

$$\frac{du}{dt} + u \left(\frac{1}{\tau} - i\omega_e \right) = 0 \quad \text{dont la solution est : } \underline{u} = v_{ex} \exp(-t/\tau) \exp(i\omega_e t) \quad [\text{on a tenu compte de } \underline{u}(0) = v_{ex} + i.0]$$

En prenant partie réelle et imaginaire : $v_x = v_{ex} \exp(-t/\tau) \cos(\omega_e t)$ et $v_y = v_{ex} \exp(-t/\tau) \sin(\omega_e t)$

•23 – Pour $t \gg \tau$ (il suffit en pratique d'avoir $t > 10^{-10} \text{ s}$) : $v_x = 0$ $v_y = 0$ et $v_z = V_{lim}$: l'électron suit une droite parallèle à Oz, à la vitesse constante V_{lim} . Il atteint l'électrode $z=L$ en partant du point d'ionisation z_{ion} au bout d'une durée Δt telle que $L = z_{ion} + V_{lim} \cdot \Delta t$. En mesurant Δt , on accède ainsi à z_{ion} .

III B – Etude des chambres proportionnelle et à fils

•24 – pour ioniser un atome d'argon, il faut $1520 \cdot 10^3 \text{ J}$ divisé par le nombre d'Avogadro, soit $2,52 \cdot 10^{-18} \text{ J}$.

On admet qu'on dispose de l'énergie : 50% eU , soit : $1,2 \cdot 10^{-16} \text{ J}$, ce qui correspond à 47 ionisations par électron de dérive.

•25 – Le champ électrique créé par le fil est radial ; en appliquant le théorème de Gauss à un cylindre d'axe

celui du fil, de rayon r , on obtient : $E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$, puis par intégration $V_r = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + Cte$

•26 – Pour l'ensemble des 2 fils : $V = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_1) + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_2) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_2/r_1)$.

La valeur de la capacité proposée (et calculée ci-dessous) n'est pas exacte, la surface des conducteurs n'est pas équipotentielle ; c'est une approximation valable pour $d \gg a$, ce qui n'est pas du tout le cas pour l'AN..)

Pour trouver le résultat fourni, on écrira : $V(1) - V(2) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln[(d-a)/a] - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln[a/(d-a)] = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln[(d-a)/a]$

La capacité pour une longueur h de fil est alors : $C = \lambda h / [V(1) - V(2)] = \frac{\pi\epsilon_0 h}{\ln(\frac{d-a}{a})}$ AN : $C = 4,01 \cdot 10^{-14} \text{ F}$

•27 – $q_0 = C \cdot W = 4,01 \cdot 10^{-14} \text{ C}$. $q_i = q_0 - q_{av}$ ($q_{av} = 10^5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}$) $q_i = 2,41 \cdot 10^{-14} \text{ C}$.

La loi de la maille s'écrit : $W = U_R + q/C$; en dérivant : $0 = dU_R/dt + i/C = dU_R/dt + U_R/RC$.

Posons $\tau = RC$ $U_R = A \exp(-t/\tau)$, et à $t=0$ $U_R = W - q_i/C = q_{av}/C = 0,40 \text{ V}$. Donc $A = 0,40 \text{ V}$.

•28 – On doit choisir R tel que $\tau \gg \tau'$ ce qui donne $R \gg 25 \Omega$

L'avalanche (facteur 10^5) permet d'avoir une valeur notable de la tension U_R .

On a vu que la trajectoire de l'électron d'ionisation est quasiment parallèle à Oz : les coordonnées (x,y) de la particule fille au moment de l'ionisation sont donc les coordonnées du fil (ou de ses proches voisins..) dans le circuit duquel se produit l'impulsion de tension U_R .

