

MINES D'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES, 2001 Physique filière PCSI :
... comme chez un scorpion, « in cauda venenum : le poison est dans la queue »

A- DU CAFE CHAUD:

A1- Tracer la courbe?

A2- Deux segments de droite? Pour $0 < t < T$, $\theta = 20^\circ\text{C}$. Pour $t > T$, $\theta = at + b$. On détermine la pente a de la droite et la température b en utilisant les points alignés à partir de 3,5 minutes. La regression linéaire donne : $a = 9,76^\circ\text{C}/\text{min}$ et $b = -0,29^\circ\text{C}$. On obtient pour $\theta = 20^\circ\text{C}$, $T = 2,08 \text{ min}$.

A3- Rendement? $r = Q/W$ avec $W = P(t_2 - t_1)$ et $Q = mC_p(\theta_2 - \theta_1)$

Entre T et 9min on trouve $r_1 = mC_p \cdot a = 0,45$ et pour le rendement global entre 0 et 9 min, $r_2 = 0,35$.

On améliore r_2 en diminuant les pertes thermiques en posant un couvercle sur la casserole.

A4- Chauffer 0,75L pour 8 tasses? La courbe donne 7,25 min pour atteindre 70°C avec un litre d'eau. Mais c'est à partir de 2,08 min que le fait d'avoir 0,75L diminue le temps de chauffe. $t = (7,25 - 2,08) \cdot 0,75 + 2,08 = 6 \text{ min}$ Ce résultat est inférieur comme prévu au temps de 6 min 15s observé, puisqu'on n'a pas agité le café.

B- RESONANCE AUX BORNES DU CONDENSATEUR:

B1- Module de H fonction de transfert aux bornes de C en fonction de Q et $x = \omega/\omega_0$?

$$\underline{H} = \underline{u}_s/\underline{u}_e = \underline{Z}_c I / (\underline{Z}_{\text{tot}} I) \quad \underline{H} = (1/jC\omega)(R + j(L\omega - 1/C\omega)) \quad \underline{H} = 1/(jx/Q + (1 - x^2))$$

$$\text{Module} \quad H = 1/((1 - x^2)^2 + x^2/Q^2)^{1/2}$$

B2- Calcul de Q, x_0 (H_{max}) et H_{max} ? $Q = 1/(Rc\omega_0) = (1/R)(L/C)^{1/2}$ $Q = 25$

H est max quand le dénominateur est min donc sa dérivée est nulle: $1 - x^2 = 1/2Q^2$ $x = 1$ à $1/1000^{\text{ème}}$ près $H_{\text{max}} = 25$

B3- Bande passante? x_1 et x_2 donnent 17,7 soit $H_{\text{max}}/\sqrt{2}$, limites de la bande passante. $x_2 - x_1 = 1/Q$ ce que l'on vérifie.

B4- Allure du diagramme de Bode? La bande passante de largeur $1/Q$ est très étroite et $H = 1$ environ si $x \ll 1$, filtre passe bas aux bornes d'un condensateur. Si $x \gg 1$ H décroît donc seul le graphe a vérifié toutes ces conditions.

B5- $I_{\text{max}} = 500\text{mA}$ et $U_{\text{cmax}} = 200\text{V}$, valeur de U_{max} ? $R + r = 40 \Omega$ et $I_{\text{max}} = U/(R + r)$, la condition $I_{\text{max}} < 500\text{mA}$ limite U à la valeur max de 20V. La condition $U_{\text{cmax}} = QU < 200\text{V}$ donne $U_{\text{max}} = 8\text{V}$.

C-SATELLITE SUR ORBITE:

C1- Energie potentielle sur orbite circulaire? C'est le travail à fournir pour amener le satellite de l'infini où l'énergie potentielle est nulle, à la distance r du centre de la terre.

On intègre $dW = -fdr$ entre l'infini et r , ce qui donne : $E_p = -k/r$

C2- a) Vitesse sur orbite circulaire? $r = R(1 + \alpha)$ La relation fondamentale de la dynamique et l'expression v^2/r de l'accélération centrale donnent: $v_0 = (GM/(1 + \alpha)R)^{1/2}$,

$$\text{A.N.} \quad v_0 = 7,72\text{km/s.}$$

C2- b) Energie mécanique? $E = E_p + E_c = -k/r + \frac{1}{2}mv^2$ $E = -\frac{1}{2}GmM/(1 + \alpha)R$

$$\text{A. N.} \quad E = -1,19 \cdot 10^{10}\text{J.}$$

C3- a) Moment cinétique constant? La dérivée du moment cinétique σ est égale au moment des forces appliquées au satellite par rapport à O, moment nul puisque la force est centrale. Le

moment cinétique est constant. Or $\sigma = \mathbf{OM} \wedge m\mathbf{v}$ est perpendiculaire à la vitesse $\mathbf{v}$ et à $\mathbf{OM}$ rayon vecteur colinéaire à la force. Le satellite reste donc dans ce plan perpendiculaire à σ .

C3- b) En coordonnées polaires? On remplace $\mathbf{OM}$ par $r\mathbf{u}_r$ et $\mathbf{v}$ par $(dr/dt)\mathbf{u}_r + r(d\theta/dt)\mathbf{u}_\theta$

$$\sigma = mr^2 d\theta/dt \mathbf{u}_z$$

C4- a) Valeurs min et max de $r=p/(1+e\cos\theta)$? r est min pour $\cos\theta = +1$ périhélie et max pour $\cos\theta = -1$, aphélie. $r_{\min} + r_{\max} = 2a$ d'où $a = p/(1-e^2)$.

C4- b) Energie mécanique $E = -k/2a$? $E = -k/r + \frac{1}{2}mv^2$. On utilise les deux formules du rappel donné, on remplace $1/r$ et sa dérivée en fonction de θ et on simplifie pour obtenir :

$$E = -k/2a$$

C5- Vitesse $v = \beta v_0$, perpendiculaire à $\mathbf{OM}$, valeurs min et max?

Pour que le satellite n'échappe pas à l'attraction terrestre sa vitesse doit être inférieure à la vitesse de libération v_l telle qu'il arrive à l'infini avec une vitesse nulle donc une énergie totale nulle. $E = -GmM/r + \frac{1}{2}mv_l^2$ et $E = 0$. $v_l = v_0\sqrt{2}$ d'où $\beta < 1,414$

Pour que le satellite ne s'écrase pas sur terre, il faut que l'orbite elliptique soit au plus tangente à la surface terrestre donc la touche au périhélie, le point de départ étant l'aphélie. On égale les deux expressions de l'énergie totale.

$$\frac{1}{2}mv_{\min}^2 - k/R(1+\alpha) = -k/2a \text{ avec } 2a = r_{\min} + r_{\max} = R(2+\alpha). \text{ On obtient } v = (1+\alpha/2)^{-1/2}$$

v_0 , ce qui donne $\beta > 0,99$.

v_0 étant la vitesse de l'orbite circulaire, la vitesse de direction perpendiculaire à $\mathbf{OM}$ donnée au satellite, doit être comprise entre $0,99v_0$ et $1,41v_0$.

D- DIFFUSION DE NEUTRONS:

D1- Régime permanent, densité de neutrons j_n ? Permanent donc $n(x)$ indépendant du temps. $j_n = -Ddn/dx$. Tout ce qui rentre dans le barreau de section constante S , à la côte 0, sort à la côte $x=L$. Donc j_n ne dépend pas de x . $dn/dx = (n_L - n_0)/L$ $j_n = D(n_0 - n_L)/L$

D2- a) Pastille irradiée et absorption de neutrons K , $\partial n / \partial t = D \partial^2 n / \partial x^2 - K$?

On fait le bilan dans la tranche dx entre les instants t et $t + dt$:

$$(dn)Sdx = [Sj_n(x) - Sj_n(x+dx)]dt - KS(dx)dt \text{ avec } j_n(x+dx) = j_n(x) + (\partial j_n(x) / \partial x)dx$$

On utilise la loi de Fick donnée et on obtient l'expression demandée.

D2- b) Régime permanent $j_n = f(x)$? $dn/dt = 0$, on intègre $\partial^2 n / \partial x^2 = K$ d'où $dj_n / dx = -K$
 $j_n = -Kx + j_0$.

D2- c) Pour L' , le courant de neutrons s'annule? $j_n = 0$ donne $L' = j_0/K$, obtenu directement en écrivant que tous les neutrons entrant ont été absorbés sur la distance L' : $Sj_0 = KSL'$.

D2- d) K n'est pas constant? Le nombre de neutrons absorbés par unité de temps et de volume dépend de la densité de neutrons présents: on peut proposer $K = kn$.

D3- Neutrons dans un barreau fissile $n = 0$ en $x = 0$ et $x = L$. $n(x,t)$ diverge pour $L > L_0$?

on donne $\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + kn$ et $n = f(x).g(t)$ on remplace et on obtient en divisant par

$$Dg(t): \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + (f(x)/D)[k - g'(t)/g(t)] = 0$$

Les conditions aux limites sont impossibles si la solution en $f(x)$ n'est pas oscillante. Le crochet est donc positif. $(1/D)[k - g'/g] = \omega^2$ (1)

d'où la solution : $f(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$ $x = 0, n = 0 \Rightarrow A = 0$

$$x = L, n = 0 \Rightarrow B \sin(\omega L) = 0$$

d'où : $\omega L = 0, \pi, 2\pi, \dots$ **$f(x) = B \sin(p\pi/L)x$**

Etudions la condition (1) pour que le crochet soit positif:

on intègre la relation (1) : $g = g_0 \exp(-(D\omega^2 - k)t)$ Pour que g reste fini, l'exposant $(k -$

$D\omega^2)$ doit être négatif. ou $D\omega^2 > k$ or $\omega = p\pi/L$ ce qui donne $L < p\pi\sqrt{\frac{D}{k}}$

Pour $p = 1$ on obtient $L_0 = \pi\sqrt{\frac{D}{k}}$ Si $L > L_0$ la fission s'emballe car la solution n'est pas finie.