

Теория поверхностей

Введение

В работе рассматривается теория внутренней поверхности в геометрии.

Изложение темы строится вокруг теоремы Александрова.

Внутренняя геометрия поверхности - это совокупность тех ее геометрических свойств, которые могут быть получены лишь при помощи измерений на поверхности без обращения к объемлющему пространству. Например, планиметрия - внутренняя геометрия плоскости

Теория внутренней поверхности имеет значение в неевклидовых системах геометрии. Так как всякую поверхность с точки зрения ее внутренней геометрии можно рассматривать как интерпретацию любой поверхности, наложимой на нее, а необходимым и достаточным условием наложимости поверхностей является равенство гауссовых кривизн в соответственных точках поверхностей, Бельтрами установил, что плоскость Лобачевского может быть интерпретирована любой поверхностью постоянной отрицательной кривизны.

В работе будет рассмотрено представление о взаимосвязи поверхности и ориентации и о внутренней геометрии поверхности.

Глава I. Поверхности и ориентация

Всякая простая поверхность допускает ориентацию. Простая гладкая поверхность Γ в $\mathbb{R}^3$ задается параметрическим отображением

$$(x, y, z) = \theta(u, v), \quad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

ранг производной (матрицы Якоби) которого равен 2. Переменные $\overline{u, v}$ называются локальными координатами на Γ . Ориентация поверхности Γ определяется как ориентация области изменения локальных координат (т.е.

ориентацией пространства $\mathbb{R}^2$). Например, изменение порядка локальных координат меняет ориентацию поверхности Γ на противоположную. Выбор ориентации поверхности можно осуществить выбором базиса касательных векторов, например

$$\tau_1 = \frac{\partial \theta}{\partial u}, \quad \tau_2 = \frac{\partial \theta}{\partial v},$$

непрерывно зависящих от точки поверхности. Такое определение ориентации можно распространить и на поверхности, не являющиеся простыми. Наконец, ориентацию поверхности можно задать выбором вектора единичной нормали $\mathbf{n}$, непрерывно зависящего от точки поверхности. При этом надо пользоваться соглашением: вектор $\mathbf{n}$ определяет ту же ориентацию, что и касательные векторы τ_1, τ_2 , если базис векторов $\mathbf{n}, \tau_1, \tau_2$ задает ориентацию пространства $\mathbb{R}^3$. О выборе вектора нормали говорят как о выборе стороны поверхности Γ . Поверхность, не являющаяся простой может не быть ориентируемой. Это означает, что на этой поверхности не существует непрерывно зависящего от точки поверхности базисного репера τ_1, τ_2 касательных векторов, определяющих ориентацию касательных плоскостей. Это же означает, что непрерывно перемещая вектор единичной нормали к поверхности по замкнутому пути можно так выбрать этот путь, что при возвращении в исходную точку направление вектора нормали изменится на противоположное. Такие поверхности называются односторонними. Односторонние поверхности не ориентируемы. Примером односторонней поверхности в $\mathbb{R}^3$ является лист Мебиуса.

Рис.1-а: Лист Мебиуса

Глава II. Внутренняя геометрия поверхности. Теорема Александрова

Рассмотрим развертку многогранника.

а).

б).

в).

г).

Рис. 2.

Сделаем это на примере разверток куба. Разрежем поверхность куба вдоль всех его ребер. Получим шесть квадратов, у которых склеиваемые стороны и вершины отмечены одинаковыми буквами (рис. 2, а). Эта совокупность квадратов является разверткой куба. Но это - особая развертка. Каждый ее многоугольник - это грань многогранника. А каждая сторона многоугольника (вместе с еще одной стороной другого многоугольника) - это ребро многогранника. Вершины развертки, отмеченные одной буквой, склеиваются в одну вершину многогранника.

Склеив между собой некоторые многоугольники по одноименным сторонам, получаем другую, хорошо известную, крестообразную развертку куба (рис. 2, б).

Она состоит лишь из одного многоугольника с 14 вершинами и таким же количеством сторон. Отмеченные одинаковыми буквами вершины и стороны склеиваются между собой. На этой развертке грани куба уже не представлены в виде отдельных многоугольников. Не представлены на ней также и некоторые ребра, но представлены все вершины.

Теперь, вместо того чтобы склеивать квадратные грани между собой, разрежем каждую из них на четыре треугольника. Получим новую развертку куба, состоящую из 24 треугольников (рис. 2, г). Каждый треугольник - это лишь часть грани куба. В этой развертке мы сталкиваемся с новым для нас обстоятельством: не все стороны развертки являются ребрами многогранника и не все вершины развертки являются вершинами многогранника.

Эти 24 треугольника можно склеить вдоль отождествляемых сторон и по-другому (рис. 2, д). В этой развертке, состоящей из единственного многоугольника, ни одна из сторон не является истинным ребром куба, который

получается из этой развертки.

Теперь дадим определение развертки. Пусть имеется несколько многоугольников, у которых каждая сторона отождествлена с одной и только одной стороной того же или другого многоугольника этой совокупности. Это отождествление (или склеивание) сторон должно удовлетворять еще двум условиям:

- 1). отождествляемые стороны имеют одинаковую длину;
- 2). от каждого многоугольника к любому другому можно перейти, проходя по многоугольникам, имеющим отождествленные стороны.

Совокупность многоугольников, удовлетворяющая условиям 1) и 2), называется разверткой.

Возьмем на развертке точки X и Y . В силу условия 2) их можно соединить ломаными, переходящими с одного многоугольника развертки на другой через отождествляемые точки границ этих многоугольников. Выберем среди всех ломаных, соединяющих данные точки, самую короткую. Длина кратчайшей ломаной, соединяющей две точки, называется расстоянием между ними на развертке. Кратчайшей ломаной, соединяющей точки X и Y на развертке, показанной на рис. 13, б является ломаная XFY (соответствующая ломаная на поверхности куба показана на рис. 1, в). Всякая кратчайшая состоит из прямолинейных отрезков на многоугольниках развертки. Причем, как нетрудно видеть, два отрезка кратчайшей, подходящие к отождествляемым точкам, составляют с отождествляемыми сторонами равные углы (рис. 1, б). Введенное расстояние удовлетворяет неравенству треугольника: $\rho(X,Y) + \rho(Y,Z) \geq \rho(X,Z)$. Перекроем теперь эту развертку в новую путем разрезания и склеивания. Точкам X и Y первой развертки будут соответствовать точки X' и Y' новой развертки (рис. 1, д). Расстояние между любыми двумя точками на новой развертке будет тем же, что и расстояние между соответствующими точками на предыдущей развертке. О таких развертках говорят, что они изометричны. Таким образом, если одна развертка получена из другой при помощи разрезания ее многоугольников и склеивания вдоль отождествляемых сторон, то они изометричны друг другу. Совершенно аналогично, развертка многогранника изометрична самому многограннику (его поверхности). Если X и Y - точки на развертке, а X' и Y' - соответствующие им точки на многограннике, то расстояние $\rho_p(X,Y)$ между X и Y на развертке равно расстоянию $\rho_m(X',Y')$ между точками X' и Y' , измеренному по поверхности многогранника. Все утверждения, которые можно получить,

измеряя расстояния между точками многогранника, составляют так называемую внутреннюю геометрию многогранника.

Для квадрата склеивание выполнить просто. Соединение верхней и нижней сторон даёт цилиндр, открытый с обоих торцов; склеивание открытых торцов даёт бублик. После склеивания сторон «швы» исчезают; флатландец не может определить, где было произведено склеивание. Бублик и квадрат с надлежащим образом отождествлёнными сторонами считаются топологически одним и тем же абстрактным многообразием, а именно двумерным тором.

Идея внутренней геометрии поверхности, в частности внутренней геометрии многогранника, впервые появилась в работах великого немецкого математика Гаусса (1777--1855). В XIX веке математики открыли, что любое двумерное многообразие можно представить как многоугольник, стороны которого определённым образом склеены или, иными словами, отождествлены друг с другом. В романе «Флатландия», опубликованном в 1884 году, Э. Эббот описывает двумерное существо, постоянно живущее на двумерном многообразии с более экзотической топологией - на квадрате, противоположные стороны которого отождествлены. Когда флатландец пересекает верхнюю сторону квадрата, он вновь появляется на нижней его стороне; если он уходит вправо, то появляется слева. Поэтому, по сути дела, верх квадрата приклеен к его низу, а правая сторона - к левой. Стоит отметить, что так же устроены многие видеоигры: когда фигура уходит за верхний край экрана, она появляется снизу, и т.д.

Представим себе, что на какой-то поверхности живет некий геометр по фамилии Точкин. Точкин - это двумерное существо очень небольших размеров, которое может свободно перемещаться по поверхности и измерять расстояния $\rho(X,Y)$ между любыми двумя ее точками X и Y.

Все, что может вывести из этой информации наш геометр, как раз и составляет предмет внутренней геометрии поверхности. С другой стороны, Точкин даже не подозревает о существовании пространства, в котором находится данная поверхность. Тем более он ничего не знает о том, как эта поверхность расположена в пространстве.

а)

б)

Рис. 3

Мы, обитатели Земли, в отличие от Точкина, живем в трехмерном мире. Мы можем любоваться картиной звездного неба. Стоя на берегу моря и наблюдая, как скрывается за горизонтом корабль, мы можем догадаться о том, что поверхность Земли - это не плоскость. У Точкина же, повторяем, никакой информации об

окружающем пространстве нет. Оставляя за рамками разговора особенности восприятия Точкиным двумерного мира, попытаемся представить, что можно было бы сделать на его месте. Например, можно было бы определить окружность радиуса R с центром O как множество точек на поверхности, удаленных от O на расстояние R . Будь это поверхность многогранника, например куба, Точкин заметил бы, что формула длины окружности или площади круга зависит не только от радиуса, но и от выбора центра. Он обнаружил бы, что длина $l(R)$ окружности с центром в вершине куба выражается как $l(R) = \frac{3}{2} \pi R$, если R не превосходит длины ребра куба, в то время как окружность с центром не в вершине куба при достаточно маленьком радиусе (меньшем расстояния от центра до ближайшей вершины) имеет длину $2 \pi R$ (рис.3, а). При больших значениях радиуса зависимость длины окружности от радиуса перестает быть линейной. Давайте, исходя из куба, построим другой многогранник. Для этого «продавим» часть многогранного угла в многогранный угол, симметричный исходному относительно плоскости ABC (рис. 3, б). Нетрудно видеть, что между точками куба и продавленного куба существует взаимно однозначное соответствие, при котором расстояния между соответствующими точками равны. Хотя эти многогранники не конгруэнтны друг другу, их внутренняя геометрия одинакова. Так что если бы наш знакомый геометр заснул на поверхности куба и в спящем состоянии был перенесен на поверхность куба с продавленным углом, то, проснувшись, он бы не заметил никакой разницы. Итак, мы подошли к основной теореме Александрова о развертках выпуклых многогранников. Нам понадобится эйлерова характеристика развертки, которая определяется аналогично эйлеровой характеристике многогранника

$$\chi = V - P + \Gamma$$

где Γ - число многоугольников, входящих в развертку, P - число сторон многоугольников, при этом каждые две отождествляемые между собой стороны считаются за одну, V - число вершин, причем отождествляемые между собой вершины также считаются за одну.

Подсчитаем эйлерову характеристику для нескольких разверток. Для крестообразной развертки куба (рис. 2, в) имеем: $V=8$, $P=7$, $\Gamma=1$ и, соответственно, $\chi=2$. Для развертки куба, изображенной на рис. 13, д имеем: $V=11$, $P=10$, $\Gamma=1$, откуда опять $\chi=2$.

Для специальной развертки, у которой каждый многоугольник - это грань многогранника, каждое ребро - это ребро многогранника, а вершина - вершина многогранника, легко видеть, что эйлерова характеристика развертки равна эйлеровой характеристике многогранника. Но нетрудно показать, что эйлерова характеристика сохраняется при перекраивании данной развертки в изометричную ей. Таким образом, эйлерова характеристика любой развертки

многогранника равна характеристике этого многогранника. Поэтому у развертки выпуклого многогранника эйлера характеристика равна 2.

Далее, если вершине развертки соответствует настоящая вершина многогранника, то сумма подходящих к вершине развертки углов строго меньше 2π . Если же вершине развертки соответствует какая-нибудь точка внутри грани или ребра, то сумма подходящих к вершине углов равна 2π . Поэтому в развертке выпуклого многогранника сумма углов, подходящих к каждой ее вершине, не превышает 2π .

Теорема Александрова о развертке. Из всякой развертки, удовлетворяющей условиям:

- (1). ее эйлера характеристика равна 2;
- (2). сумма углов, подходящих к любой вершине развертки, не превосходит 2π , можно склеить выпуклый многогранник.

Рис. 4

Отметим, что среди этих многогранников могут встретиться и вырожденные многогранники. Возьмем развертку, состоящую из двух равных выпуклых многоугольников, у которых соответственные стороны и вершины попарно отождествлены (рис. 4). Эйлерова характеристика такой развертки

$$\chi = B - P + \Gamma = n - n + 2 = 2$$

где n - число сторон у равных многоугольников. Эта развертка удовлетворяет и условию (2). По теореме Александрова, из нее можно склеить многогранник. Это - вырожденный многогранник, или иначе «двойной многоугольник».

Мы уже упоминали, что в отличие от теоремы Коши теорема Александрова не является интуитивно очевидной. Рассмотрим два примера.

а)

б)

в)

Рис. 5.

а) б) в)

Рис. 6.

«Тетраэдрический» пакет. В недалеком прошлом молоко разливалось в пакеты, которые имели форму не параллелепипеда, как сейчас, а правильного тетраэдра. Хотя упаковывать в тару эти тетраэдры было неудобно, зато их легко изготавливать. Сначала прямоугольная лента склеивается в цилиндр, горизонтальные края которого затем заклеиваются в двух взаимно перпендикулярных плоскостях (рис. 5, а, б). Развертка такого тетраэдра - это прямоугольник, стороны которого разбиваются на меньшие отрезки-ребра развертки, попарное отождествление которых показано на рис. 5, в. Данная развертка удовлетворяет обоим условиям теоремы Александрова. Это можно даже не проверять, так как это развертка выпуклого многогранника. Теперь предположим, что автомат, изготавливающий пакеты, «зачастил».

Конкретнее, предположим, что прямоугольник развертки очень «низкий», а правила склеивания остаются теми же (рис. 6, а). Эта развертка, так же как и «высокий» прямоугольник, удовлетворяет условиям (1) и (2). По теореме Александрова, из этой развертки можно склеить выпуклый многогранник. С другой стороны, если нижний край цилиндра уже склеен, то для склеивания в перпендикулярном направлении не хватает высоты (рис. 6, б). Кажется почти очевидным, что эта развертка является контрпримером к теореме Александрова. Тем не менее, и из этой развертки тоже можно склеить тетраэдр (рис. 6, в).

Возможность склеить из этой тупоугольнотреугольной развертки тетраэдр кажется еще более сомнительной.

Задача определения многогранника по развертке, если развертка имеет более четырех настоящих вершин (в которых сумма подходящих углов меньше 2π), является очень трудной. По теореме Александрова о развертке, мы знаем, что

выпуклый многогранник существует. По теореме Коши-Александрова, он единственный.

Возникает вопрос: каков он? Легко определить на развертке вершины многогранника. Каждому ребру на многограннике соответствует кратчайшая, соединяющая какие-то вершины. Но не все кратчайшие, соединяющие вершины, являются ребрами. Определить, какие пары вершин на развертке соединяются ребрами, - очень трудная, нерешенная задача.

Заключение

Вывод по работе относится к теории внутренней поверхности: для специальной развертки, у которой каждый многоугольник - это грань многогранника, каждое ребро - это ребро многогранника, а вершина - вершина многогранника, легко видеть, что эйлерова характеристика развертки равна эйлеровой характеристике многогранника. Но нетрудно показать, что эйлерова характеристика сохраняется при перекраивании данной развертки в изометричную ей. Таким образом, эйлерова характеристика любой развертки многогранника равна характеристике этого многогранника. Поэтому у развертки выпуклого многогранника эйлерова характеристика равна 2.

Уже в гауссовской внутренней геометрии поверхностей дифференциальная геометрия, по существу, также освобождается от неразрывной связи с геометрией Евклида: то, что поверхность лежит в трёхмерном евклидовом пространстве, является для этой теории случайным обстоятельством. Исходя из этого, Б. Риман создаёт (1854, опубл. в 1866) концепцию n -мерного многообразия с метрич. геометрией, определяемой дифференциальной квадратичной формой. Этим было положено начало общей дифференциальной геометрии n -мерных многообразий. Б. Риману же принадлежат и первые идеи в области топологии многомерных многообразий.

Список использованной литературы

1. Александров А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: 2004 - 342 с.
2. Гришин В.А. Монокулярный измеритель дальности и ориентации поверхности. М.: 2001 - 272 с.
3. Долбилин Н. П. Жемчужины теории многогранников.
<<http://www.mccme.ru/mmmf-lectures>>
4. Зорич В. А. Математический анализ. М.: 1998 - 400 с.
5. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии М.: ЭКСМОС, 2003 400 с.