

EXERCICE 1

a) L'aire d'une face du tétraèdre est $B = a \cdot a \sqrt{3}/2$. Sa hauteur est $h = a/\sqrt{2}$ par Pythagore.

- la somme des aires des faces vaut donc : $S = 4B = 2 \cdot a^2 \sqrt{3}$;

- le volume du tétraèdre est $V = B \cdot h/3 = a^3/(3\sqrt{6})$.

b) Pour un octaèdre dont les côtés ont a pour longueur, on a de même :

- $S = 8B = 4 \cdot a^2 \sqrt{3}$;

- $V = 8 \cdot (a/\sqrt{2})^3 / 6 = a^3 \sqrt{2}/3$ (obtenu en découpant l'octaèdre en 8 tétraèdres)

EXERCICE 2

a) L'endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ associé à U vérifie $u \circ u = \text{Id}$, donc u est une symétrie de $\mathbb{R}^n$. En particulier, u et U sont diagonalisables et leurs valeurs propres sont -1 et 1 .

- Si $n = 2m$, la résolution de $U \cdot X = X$ donne pour sous-espaces propres :

$$E_1 = \{(x_1, x_2, \dots, x_m, x_m, \dots, x_1), (x_1, x_2, \dots, x_m) \hat{\mathbb{R}}^m\}$$

$$\text{et } E_{-1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_m, -x_m, \dots, -x_1), (x_1, x_2, \dots, x_m) \hat{\mathbb{R}}^m\}.$$

- Si $n = 2m+1$, on obtient de même :

$$E_1 = \{(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, x_m, \dots, x_1), (x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}) \hat{\mathbb{R}}^m\}$$

$$\text{et } E_{-1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_m, 0, -x_m, \dots, -x_1), (x_1, x_2, \dots, x_m) \hat{\mathbb{R}}^m\}$$

b) En recherchant un vecteur propre relatif à la valeur propre λ sous la forme (X, Y) , on aboutit au système d'équations : $U \cdot X + Y = \lambda \cdot X$ et $X + U \cdot Y = \lambda \cdot Y$.

En multipliant à gauche par U , on obtient $\lambda \cdot U \cdot X = \lambda \cdot Y$ d'où $\lambda = 0$ ou $U \cdot X = Y$. De plus, l'égalité $U \cdot X = Y$ donne en reportant : $\lambda^2 \cdot X = 4X$ et $\lambda^2 \cdot Y = 4Y$, d'où $\lambda = \pm 2$ vu que $(X, Y) \neq (0, 0)$.

- Pour $\lambda = 0$, la résolution de $A \cdot (X, Y) = (0, 0)$ conduit au sous-espace propre de A :

$$E'_0 = \{(X, -UX), X \hat{\mathbb{R}}^n\}.$$

- On obtient de même le sous-espace propre E'_2 de A relatif à $\lambda = 2$:

$$E'_2 = \{(X, X), X \in E_1\} \quad (\text{où } E_1 \text{ a été défini au a).)}$$

- De façon similaire,

$$E'_{-2} = \{(X, -X), X \in E_{-1}\}.$$

Comme $\dim E'_0 + \dim E'_2 + \dim E'_{-2} = n + \dim E_1 + \dim E_{-1} = 2n$, A est diagonalisable.

EXERCICE 3

Cette ellipse E se paramétrise en $M(t) = (x(t), y(t)) = (7 + 7 \cos t, 3 \sin t)$.

Le projeté orthogonal $(X(t), Y(t))$ de O sur la tangente à E passant par $M(t)$ est alors défini par les égalités $9 \cdot (X(t) - 7) \cdot 7 \cos t + 49 \cdot Y(t) \cdot 3 \sin t = 441$ et $49 \cdot 3 \cdot X(t) \cdot \sin t - 9 \cdot 7 \cdot Y(t) \cdot \cos t = 0$.

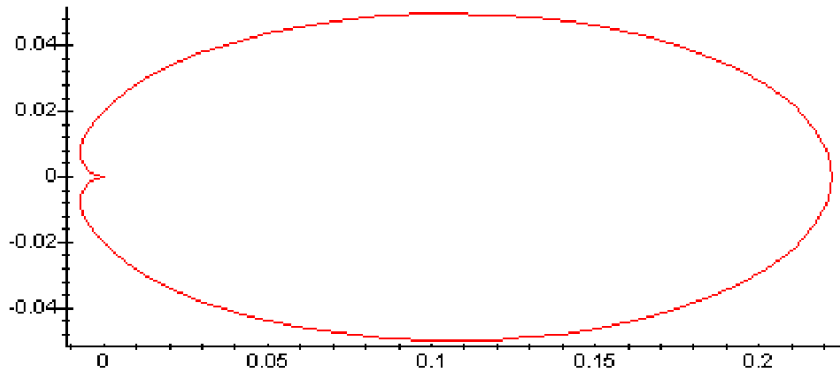
La résolution du système obtenu conduit à l'arc paramétré défini par :

$$X(t) = \frac{441}{7} \times \frac{\cos t \cdot (1 + \cos t)}{49 - 40 \cos^2 t} \quad \text{et} \quad Y(t) = 147 \times \frac{\sin t \cdot (1 + \cos t)}{49 - 40 \cos^2 t}$$

Considérons l'arc C paramétré par $(7 \times X(t)/441, Y(t)/147)$. Il ressort de ce qui précède qu'une équation en polaire de cet arc est $\rho = \frac{1 + \cos t}{49 - 40 \cos^2 t}$. On en déduit facilement que C est symétrique par rapport à Ox et que C

possède un point de rebroussement de première espèce à l'origine. Les variations de ρ sont aisées.

La courbe représentant $(X(t), Y(t))$ s'en déduit alors aisément.



EXERCICE 4

a) Une droite D définie par deux points (x_0, y_0, z_0) et (x_1, y_1, z_1) de la surface S se paramétrise en :

$$x = t.x_0 + (1-t).x_1; \quad y = t.y_0 + (1-t).y_1; \quad z = t.z_0 + (1-t).z_1$$

Le fait que D est incluse dans cette surface S se traduit alors par la relation :

$$x_0.y_1 + x_1.y_0 + x_0.z_1 + x_1.z_0 + y_0.z_1 + y_1.z_0 = 0 \quad (*).$$

De plus, D intersectant l'un des plans de coordonnées, par exemple celui d'équation $x = 0$, on peut supposer $x_1 = 0$, ce qui donne $y_1.z_1 = 0$ en écrivant que (x_1, y_1, z_1) appartient à S . Là encore, on peut supposer que $y_1 = 0$ par exemple.

En reportant dans (*), il vient : $(x_0 + y_0) \times z_1 = 0$.

- Si $z_1 = 0$, alors D passe par l'origine;

- Sinon, $x_0 + y_0 = 0$ et en réinjectant dans l'équation de S , il vient $x_0.y_0 = 0$, d'où $x_0 = y_0 = 0$. Comme les points (x_0, y_0, z_0) et (x_1, y_1, z_1) sont distincts, D est alors la droite d'équation $x = y = 0$.

Les réciproques sont évidentes (génératrices d'un cône).

b) S a à présent pour équation $xy + yz + zx = \epsilon$, où $\epsilon = \pm 1$. La traduction d'appartenance de (x, y, z) à D se traduit par l'égalité $(2-\epsilon C).t^2 + (\epsilon C - 2).t + (1-\epsilon) = 0$, où $C = x_0.y_1 + x_1.y_0 + x_0.z_1 + x_1.z_0 + y_0.z_1 + y_1.z_0$.

Cette égalité devant être réalisée pour tout t , il vient $C = 2\epsilon$ et $\epsilon = 1$.

- Si $\epsilon = -1$, S ne contient donc aucune droite (hyperboloïde à deux nappes);

- Si $\epsilon = 1$, les droites de S sont celles joignant les points (x_0, y_0, z_0) et (x_1, y_1, z_1) de S tels que

$$x_0.y_1 + x_1.y_0 + x_0.z_1 + x_1.z_0 + y_0.z_1 + y_1.z_0 = 2.$$

N.B. L'énoncé attendait-il qu'on aille jusqu'à décrire que l'hyperboloïde à une nappe S contient deux familles de droites, une droite de chaque famille passant par tout point de S ?

EXERCICE 5

a) $A^n + B^n$ se factorise en $\prod_{k=1}^n (A + \omega^k B)$, où $\omega = \exp(2i\pi/n)$.

Si $A^n + B^n$ est constant, alors tous les facteurs précédents le sont et, comme $n \geq 2$, on en déduit facilement que A et B sont constants. Réciproque évidente.

b) L'égalité $P^n + Q^n = PQ$ s'écrit encore $D^{n-2} \cdot (A^n + B^n) = AB$ avec les notations de l'énoncé.

- Si $n \geq 3$, alors D divise AB , ce qui n'est possible que si $D = 1$ étant donné que D est premier avec A et B .

- Si $n = 2$, on obtient directement $A^n + B^n = AB$ (*).

Dans les deux cas, AB est nécessairement constant car sinon, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, un des polynômes A ou B aurait une racine complexe z et, en reportant dans (*), l'autre polynôme s'annulerait aussi en z : impossible puisque A et B sont premiers entre eux.

En conclusion, les couples cherchés sont exactement les couples $(P, Q) = (p, q)$ de polynômes constants tels que $p^n + q^n = pq$.

EXERCICE 6

a) $\sin(2\alpha) / \sin(\alpha) = 2 \cdot \cos(\alpha)$ pour tout $\alpha \neq \pi/2 \text{ } [\pi]$.

b) Par une récurrence finie sur $k \leq n$, on a $P_n = P_{n-k} \times \sin \pi/2^{n+2-k} / 2^k$ et, en particulier, il vient :

$$P_n = 1 / (2^n \cdot \sin \pi/2^{n+2}).$$

On reconnaît alors P_5 dans l'expression demandée, c'est-à-dire :

$$1 / (2^5 \cdot \sin \pi/2^7).$$

c) Pour tout $\alpha \neq \pi/4 \text{ } [\pi/2]$, $1/\tan(\alpha) - 2/\tan(2\alpha) = \tan(\alpha)$.

d) En appliquant l'égalité du **c)** à $\alpha = \pi/4$, on en déduit que $\tan \pi/8$ est solution de l'équation $t^2 + 2t - 1 = 0$ et comme $\tan \pi/8 > 0$, on trouve $\tan \pi/8 = \sqrt{2} - 1$.

On a alors $S_0 = \tan \pi/4 = 1$ et $S_1 = \tan \pi/4 + \frac{1}{2} \tan \pi/8 = (\sqrt{2} + 1) / 2$.

D'après le **c)**, $t_n = f(n) - f(n-1)$, où $f(n) = 1 / (2^n \cdot \tan \pi/2^{n+2})$. Par « télescopage », il vient :

$$S_n = f(n) - f(0) + S_0 = 1 / (2^n \cdot \tan \pi/2^{n+2}) = 1 / (4^n \cdot t_n).$$

e) Par des calculs immédiats d'équivalents, les suites (S_n) et (P_n) convergent chacune vers $4/\pi$.