

Цель занятия:

Деятельностная:

- создать условия для формирования навыков построения графиков тригонометрических функций.

Содержательная:

- актуализировать знания обучающихся об основных видах преобразования графиков функций;
- расширить знания учеников за счет включения новых определений: амплитуда, частота, начальная фаза для тригонометрических функций;
- познакомиться с задачами на построение графиков сложных тригонометрических функций.

План занятия:

1. Сжатие и растяжение графиков тригонометрических функций.
2. Преобразование графиков тригонометрических функций

1. Сжатие и растяжение графиков тригонометрических функций.

Растяжение и сжатие графиков тригонометрических функций по оси ОХ

Общие принципы растяжения и сжатия графиков по оси ОХ:

1. При сравнении графиков двух функций $y_1 = f(x)$, $y_2 = f(px)$, $p > 0$, график второй функции **сжимается** в p раз по оси ОХ по сравнению с графиком первой функции.

2. При сравнении графиков двух функций $y_1 = f(x)$, $y_2 = f(x/p)$, $p > 0$, график второй функции **растягивается** в p раз по оси ОХ по сравнению с графиком первой функции.

Эти принципы справедливы и для тригонометрических функций.

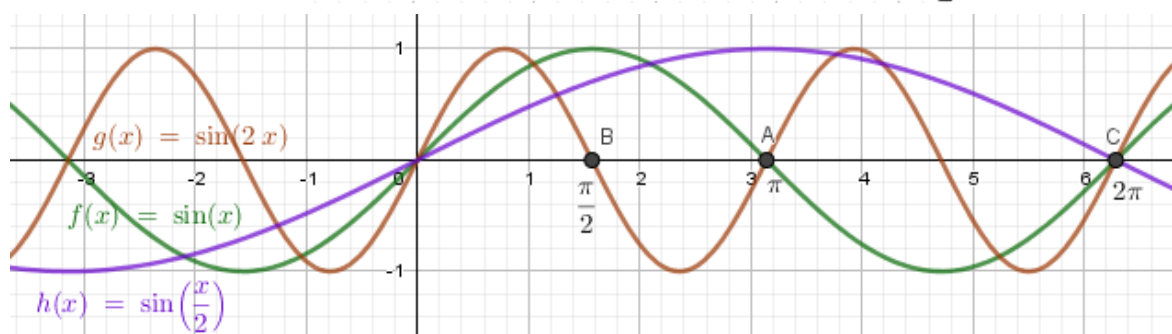
Тригонометрические функции являются периодическими: синус и косинус с периодом 2π , тангенс и котангенс – с периодом π . Получаем следствие общих принципов:

1. При сравнении двух тригонометрических функций $y_1 = f(x)$, $y_2 = f(px)$, $p > 0$, период второй функции уменьшается в p раз: $T_2 = T_1/p$.

2. При сравнении двух тригонометрических функций $y_1 = f(x)$, $y_2 = f(x/p)$, $p > 0$, период второй функции увеличивается в p раз: $T_2 = pT_1$

Построим в одной системе координат три графика:

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \sin 2x, \quad h(x) = \sin \frac{x}{2}$$



Период колебаний функции $g(x) = \sin 2x$ в 2 раза меньше: $T_g = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Период колебаний функции $h(x) = \sin \frac{x}{2}$ в 2 раза больше: $T_h = 2 \cdot 2\pi = 4\pi$.

Растяжение и сжатие графиков тригонометрических функций по оси ОУ

1. Общие принципы растяжения и сжатия графиков по оси ОУ:

При сравнении графиков двух функций

$$y_1 = f(x), y_2 = Af(x), A > 0$$

график второй функции растягивается в A раз по оси ОУ по сравнению с графиком первой функции.

2. Общий принцип сжатия графиков:

$$y_1 = f(x), y_2 = (1/A)f(x), A > 0$$

При сравнении графиков двух функций

график второй функции сжимается в A раз по оси ОУ по сравнению с графиком первой функции.

Эти принципы справедливы и для тригонометрических функций.

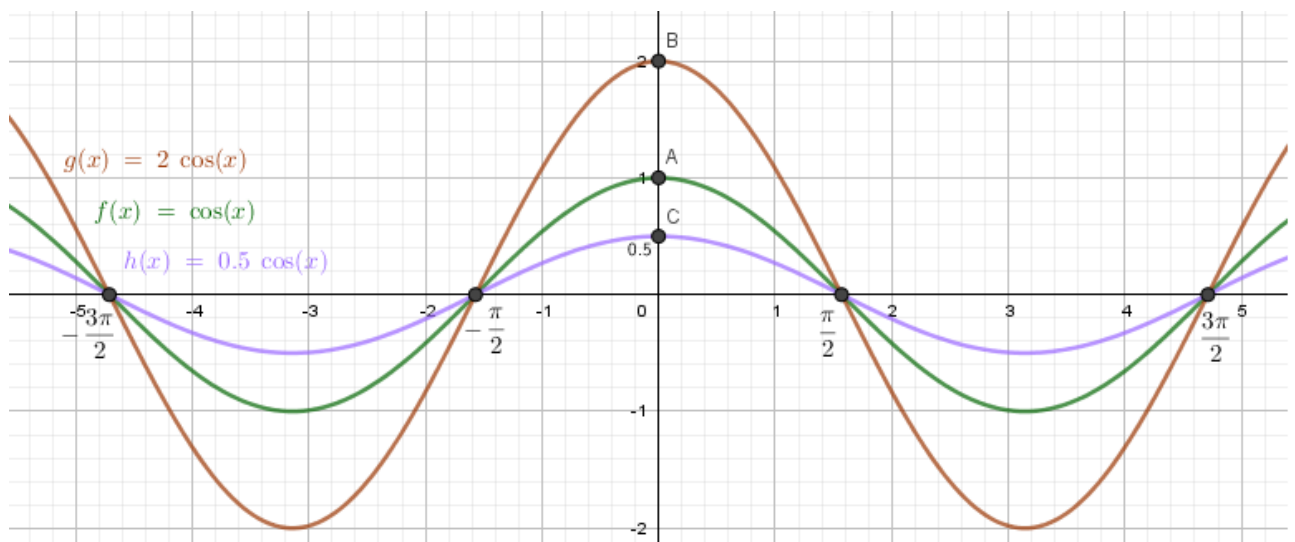
Т.к. для графиков синуса и косинуса (синусоиды) характерна амплитуда колебаний, то также говорят, что:

– умножение на параметр $A > 1$ увеличивает амплитуду колебаний в A раз;

– деление на параметр $A > 1$ уменьшает амплитуду колебаний в A раз.

Построим в одной системе координат три графика:

$$f(x) = \cos x, g(x) = 2\cos x, h(x) = \frac{1}{2}\cos x$$



Умножение на $A=2$ увеличивает амплитуду колебаний в 2 раза. Область значений функции $g(x)=2\cos x$: $y \in [-2; 2]$. График растягивается по оси ОУ.

Деление на $A=2$ уменьшает амплитуду колебаний в 2 раза. Область значений функции $h(x)=\frac{1}{2}\cos x$: $y \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$. График сжимается по оси ОУ.

2. Преобразование графиков тригонометрических функций

Параллельный перенос графиков тригонометрических функций по оси ОХ

Общие принципы переноса по оси ОХ:

1. При сравнении графиков двух функций $y_1 = f(x)$, $y_2 = f(x + a)$, $a > 0$, график второй функции смещается влево на a по оси ОХ по сравнению с графиком первой функции.

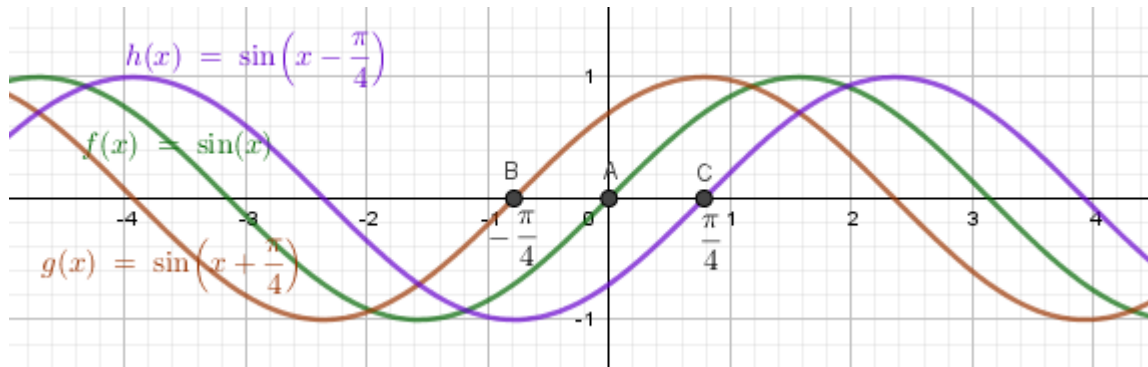
2. При сравнении графиков двух функций $y_1 = f(x)$, $y_2 = f(x - a)$, $a > 0$, график второй функции смещается вправо на a по оси OX по сравнению с графиком первой функции.

Эти принципы справедливы и для тригонометрических функций.

При этом параметр x называют **начальной фазой колебаний**. При сравнении двух тригонометрических функций $y_1 = f(x)$ и $y_2 = f(x \pm a)$ говорят, что у второй функции сдвиг по фазе равен $\pm a$.

Построим в одной системе координат три графика:

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \quad h(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$



Функция $g(x) = \sin(x + \pi/4)$ сдвинута на $\pi/4$ влево по сравнению с $f(x)$.

Функция $h(x) = \sin(x - \pi/4)$ сдвинута на $\pi/4$ вправо по сравнению с $f(x)$.

Параллельный перенос графиков тригонометрических функций по оси OY

Общие принципы переноса по оси OY :

1. При сравнении графиков двух функций

$$y_1 = f(x), \quad y_2 = f(x) + a, \quad a > 0$$

график второй функции смещается **вверх** на a по оси OY по сравнению с графиком первой функции.

2. При сравнении графиков двух функций

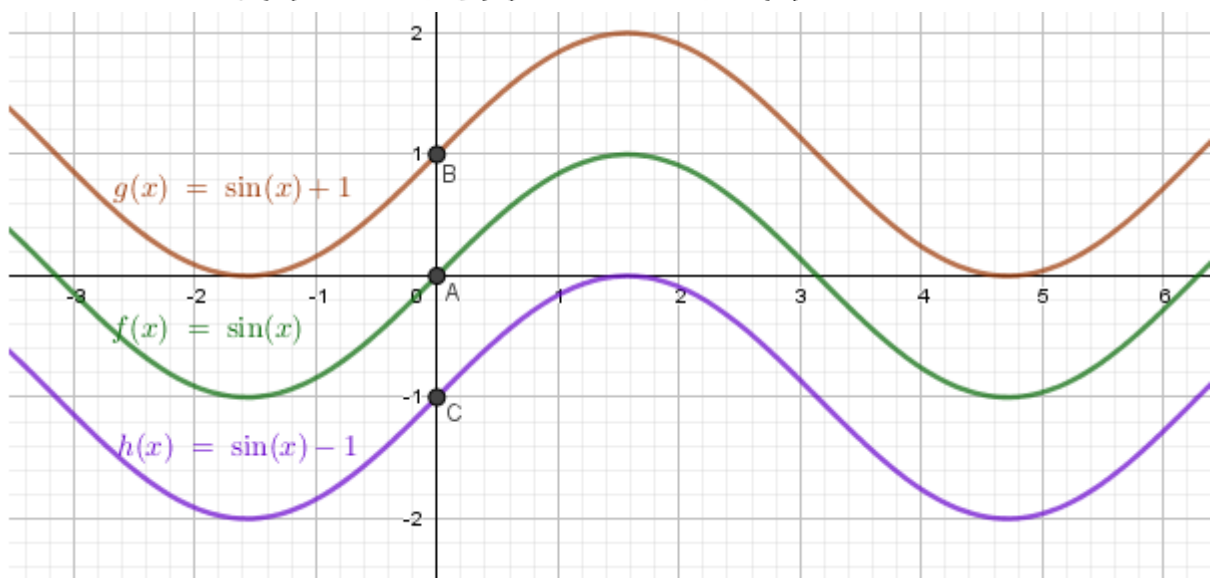
$$y_1 = f(x), \quad y_2 = f(x) - a, \quad a > 0$$

график второй функции смещается **вниз** на a по оси OY по сравнению с графиком первой функции.

Эти принципы справедливы и для тригонометрических функций.

Построим в одной системе координат три графика:

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \sin x + 1, \quad h(x) = \sin x - 1$$



Функция $g(x) = \sin x + 1$ сдвинута на 1 вверх по сравнению с $f(x)$.

Функция $h(x)=\sin x-1$ сдвинута на 1 вниз по сравнению с $f(x)$.

Общее уравнение синусоиды

Синусоида – плоская кривая, которая задается в прямоугольной системе координат уравнением:

$$y(x)=A\sin(cx+d)+B$$

где

A – амплитуда, характеризует растяжение графика по оси ОУ

B – вертикальный сдвиг, характеризует сдвиг графика по оси ОУ (вверх/вниз)

c – циклическая частота, характеризует период колебаний и растяжение графика по оси ОХ

d – начальная фаза, характеризует сдвиг графика по оси ОХ(влево/вправо)

График $y(x)=A\sin(cx+d)+B$ также называют синусоидой. Термин «косинусоида» употребляется относительно редко.

Поскольку график косинуса получается из графика синуса сдвигом по фазе на $\pi/2$ влево, вводить термин «косинусоида» излишне.

Например:

Построим график $g(x) = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$

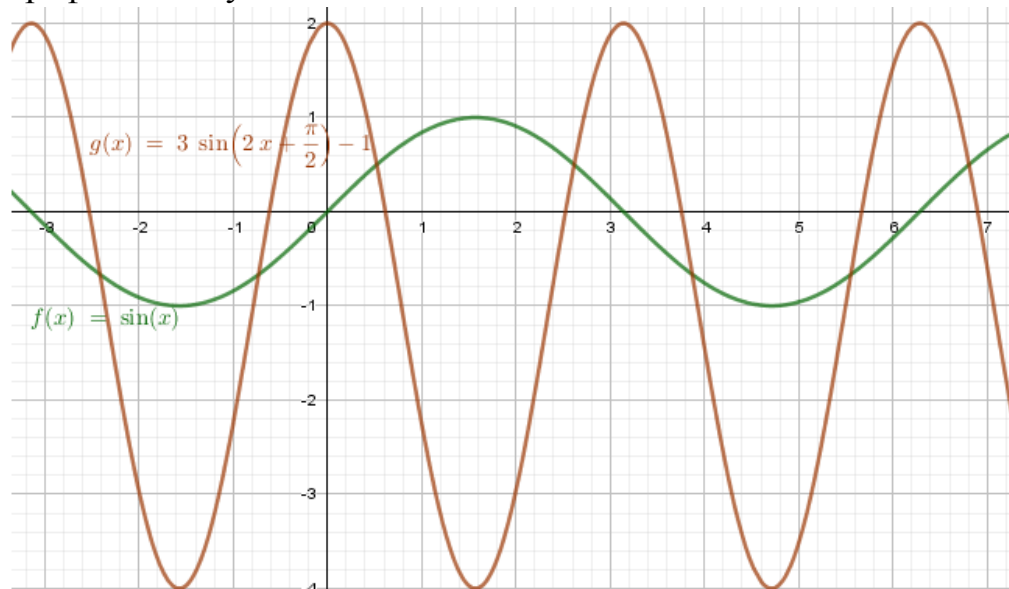
По сравнению с $f(x) = \sin x$:

$A=3$ – график растянут по оси ОУ в 3 раза

$c=2$ – период меньше в 2 раза $T=\pi$, график сжат в 2 раза по оси ОХ

$d=\pi/2$ – начальная фаза положительная, график сдвинут на $\pi/(2\cdot 2)=\pi/4$ влево

$B=-1$ – график сдвинут по оси ОУ на 1 вниз.

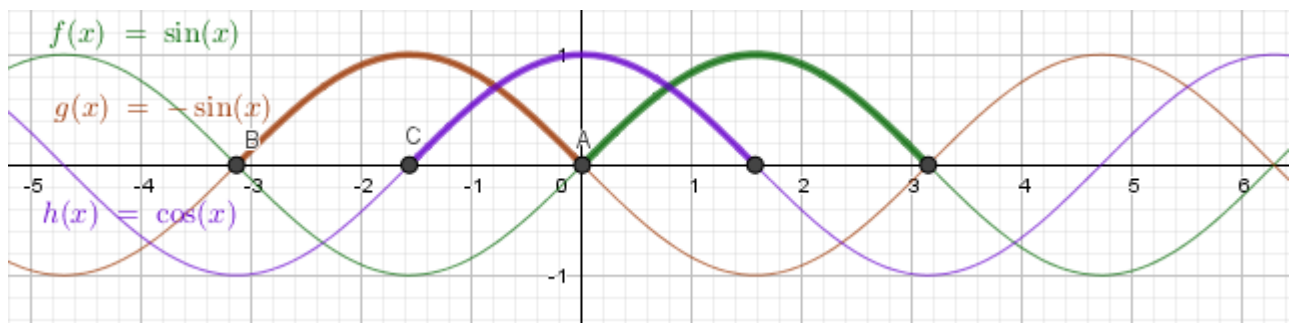


Примеры

Пример 1. Постройте в одной системе координат графики:

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = -\sin x, \quad h(x) = \cos x$$

Найдите сдвиг по фазе для $g(x)$ и $h(x)$ в сравнении с $f(x)$



Сдвиг по фазе удобно определять по главной арке синусоиды.

Для $f(x) = \sin x$ главная арка определена на отрезке $0 \leq x \leq \pi$

Для $g(x) = -\sin x$ главная арка определена на отрезке $-\pi \leq x \leq 0$, т.е. сдвинута на π влево от $f(x)$. Это означает, что: $f(x) = g(x + \pi)$, $\sin x = -\sin(x + \pi)$

Для $h(x) = \cos x$ главная арка определена на отрезке $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, т.е. сдвинута на $\pi/2$ влево от $f(x)$. Это означает, что:

$$f(x) = h\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad \sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Пример 2. Найдите наименьшие положительные периоды функций:

а) $y = \sin 5x$

Период синуса 2π уменьшается в 5 раз. Получаем: $T = 2\pi/5$

б) $y = \cos(x\pi)$

Период косинуса 2π уменьшается в π раз. Получаем: $T = 2\pi/\pi = 2$

в) $y = \tan \frac{x}{4}$

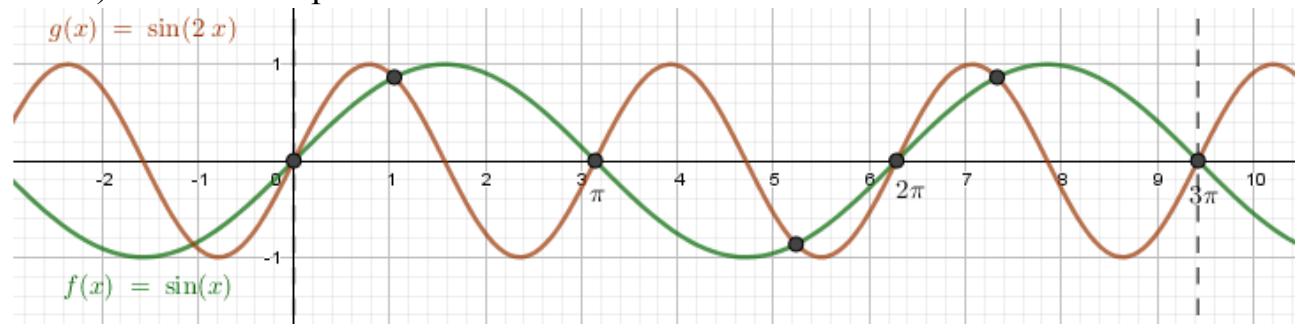
Период тангенса π увеличивается в 4 раза. Получаем: $T = 4\pi$

г) $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

Период тангенса π уменьшается в 2 раза. Получаем: $T = \pi/2$

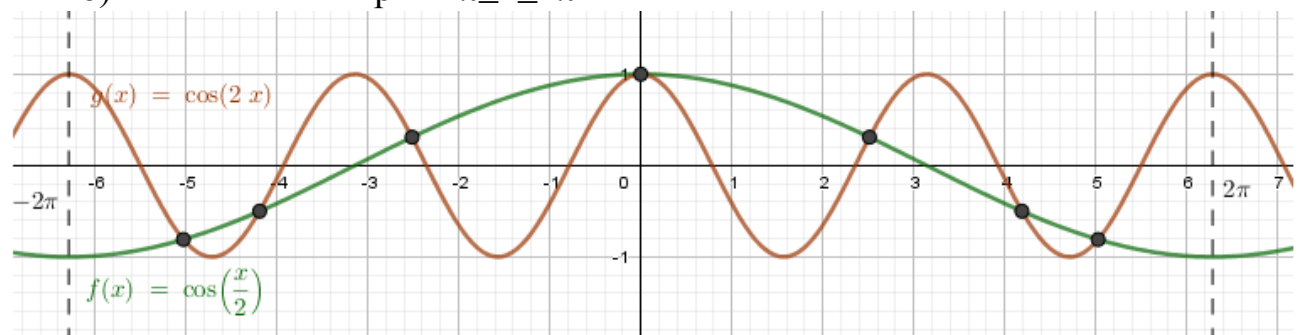
Пример 3. Определите графически, сколько корней имеет уравнение на отрезке:

а) $\sin x = \sin 2x$ при $0 \leq x \leq 3\pi$



Ответ: 7 корней

б) $\cos \frac{x}{2} = \cos 2x$ при $-2\pi \leq x \leq 2\pi$



Ответ: 7 корней

(!) Домашнее задание (!)

1. Ответьте на контрольные вопросы (письменно):
 - 1.1. По каким правилам осуществляется растяжение (сжатие) тригонометрической функции относительно оси Ox ?
 - 1.2. По каким правилам осуществляется растяжение (сжатие) тригонометрической функции относительно оси Oy ?
 - 1.3. По каким правилам осуществляется сдвиг тригонометрической функции относительно оси Ox ?
 - 1.4. По каким правилам осуществляется сдвиг тригонометрической функции относительно оси Oy ?
2. Решите предложенные задания (письменно):
 - 2.1. Найдите наименьшие положительные периоды функций:
 - а) $y = \sin 3x$;
 - б) $y = \cos(2\pi x)$;
 - в) $y = \sin 4x$;
 - г) $y = \cos(2x)$.
 - 2.2. Построить график функции $y = \cos + 1$.
 - 2.3. Построить график функции $y = 3\sin(x - \pi)$.

ОТЧЕТНОСТЬ

Работы принимаются до 3 февраля 2026 г.

Задания выполняются от руки на тетрадных листах в клетку. Каждый лист на полях подписываете: Фамилия Имя, группа, дата (в формате ДД.ММ.ГГГГ). По выполнению фотографии каждого листа (в правильном порядке и вертикальной ориентации – без перевернутых страниц) высылаете на проверку преподавателю.

Выполненное задание контрольной работы вы присылаете на @mail:

pushistav@mail.ru

В теме письма указываем:



ОД.07 Математика 27.01.26 (Фамилия Имя, группа)

К примеру:

ОД.07 Математика 27.01.26 (Иванов Иван, ТД и БУ 1/1-9/25)

Обязательно проверьте, что Вы состоите в чате:

<https://t.me/+RX9Nb2N84woxOTdi>

С уважением!

Преподаватель математики ШТЭК ДОННУЭТ

Бережная Валерия Александровна

Основная литература: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : базовый и углубленный уровни : учебник / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва [и др.]. – 10-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2022. – 463.